1

アイ	$1, 6$
ウエオ	$5, 12$
カキク	$7, 36$

[2]

ケ	6
コサ	12
シス	18

[3]

(1)

$$
\begin{aligned}
k(x+1) &= x^2 \\
x^2-kx-k &= 0 \cdots ①
\end{aligned}
$$

①の判別式を D とおくと,

$D=k^2+4k$

条件より $D>0$ であればよいから,

$$
\begin{aligned}
k^2+4k &> 0 \\
k(k+4) &> 0
\end{aligned}
$$

$-4>k,\ k>0\ \cdots$(答)

(2)

2つの交点の x 座標を $\alpha, \beta\,(\alpha<\beta)$ とおくと,

交点は (α,α^2), (β,β^2) だから, その中点は,

$\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)\cdots$②とおける.

ここで, ①式に解と係数の関係を用いて,

$$
\begin{aligned}
\alpha+\beta &= k\cdots ③ \\
\alpha\beta &= -k\cdots ④
\end{aligned}
$$

である. ②より,

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{\alpha+\beta}{2} \\
Y &= \frac{\alpha^2+\beta^2}{2} \\
&= \frac{(\alpha+\beta)^2}{2}-\alpha\beta
\end{aligned}
$$

であるから, これらに③, ④を代入すると,

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{k}{2} \\
k &= 2X\cdots ⑤
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{k^2}{2}+k \\
k^2+2k-2Y &= 0\cdots ⑥
\end{aligned}
$$

とできる.

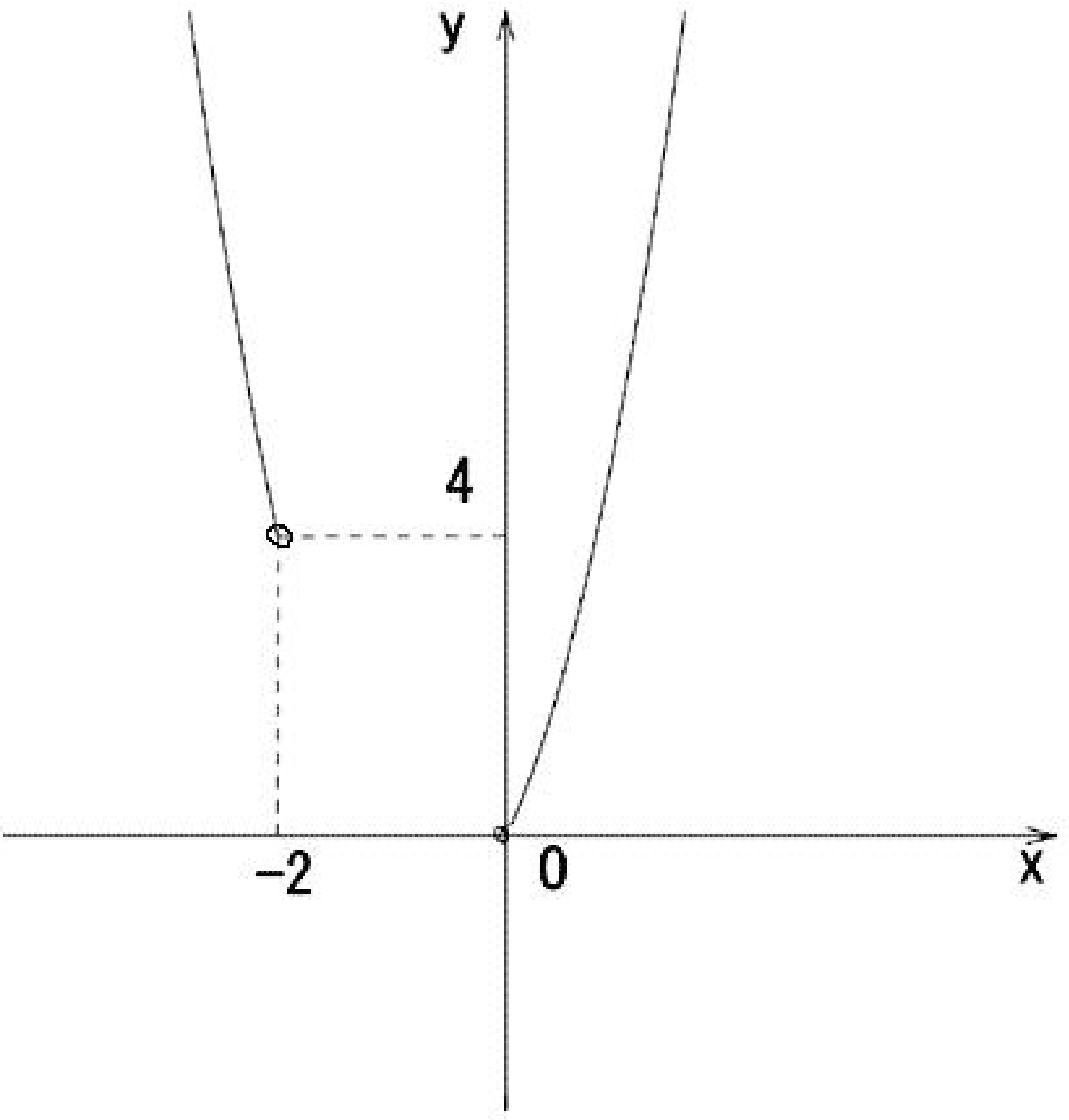
⑤を⑥に代入して,

$$
\begin{aligned}
4X^2+4X-2Y &= 0 \\
Y &= 2X^2+2X
\end{aligned}
$$

また⑤と (1) より,

$$
\begin{aligned}
-4>2X &\quad , \quad 2X>0 \\
-2>X &\quad , \quad X>0
\end{aligned}
$$

であるから, 求める軌跡は放物線 $y=2x^2+2x$ の $-2>x, x>0$ の部分であり, 図示すると以下のとおりである.



4

(1)

点 P は円 C_1 上にあるから $P(\cos\theta, \sin\theta, 0)$.

点 Q は P と同じ速さで円 C_2 上を動くから $Q(\cos\theta, 0, \sin\theta)$.

(2)

$\triangle ABP$ の面積は,

$$1\times(1-\cos\theta)\times\frac{1}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$\begin{aligned}\text{よって}V &= \frac{1-\cos\theta}{2}\cdot\sin\theta\cdot\frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{6}\sin\theta(1-\cos\theta)\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}V' &= \frac{1}{6}\cos\theta(1-\cos\theta)+\frac{1}{6}\sin\theta\cdot\sin\theta\\ &= \frac{1}{6}\cos\theta-\frac{1}{6}\cos^2\theta+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\cos^2\theta\\ &= \frac{1}{6}\left(-2\cos^2\theta+\cos\theta+1\right)\end{aligned}$$

$0<\theta<\pi$ で $V'=0$ となる θ は $\theta=\frac{2}{3}\pi$ のとき.

よって, 増減表は以下のとおり.

θ	0		$\frac{2}{3}\pi$		π
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	$\searrow$	

以上より, $\theta=\frac{2}{3}\pi$ のとき V は最大値をとり, その値は $V=\frac{\sqrt{3}}{8}$ である.

5

(1)

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^a \frac{e^x}{1+e^x}dx \\ &= [\log|1+e^x|]_0^a \\ &= \log(1+e^a) - \log 2 \\ &= \log\frac{1+e^a}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{1+e^x}{1+e^x}dx &= \int_0^a \frac{1}{1+e^x}dx + \int_0^a \frac{e^x}{1+e^x}dx \\ a &= I(a) + J(a) \\ J(a) &= a - I(a) \\ &= a - \log\frac{1+e^a}{2} \\ &= \log\frac{2e^a}{1+e^a} \end{aligned}$$

(2)

$I(a_n), J(a_n)$ を代入して,

$$\begin{aligned} \log\frac{1+e^{a_n}}{2} &= \log\frac{2e^{a_n}}{1+e^{a_n}} + \log n \\ &= \log n\frac{2e^{a_n}}{1+e^{a_n}} \\ \frac{1+e^{a_n}}{2} &= n\frac{2e^{a_n}}{1+e^{a_n}} \\ (e^{a_n})^2 + e^{a_n}(2-4n) + 1 &= 0 \\ e^{a_n} &= 2n-1 \pm 2\sqrt{n^2-n} \end{aligned}$$

$e^{a_n} > 0$ なので,

$a_n = \log(2n-1+2\sqrt{n^2-n}) \quad (n \geqq 2)$

また、$n=1$ のとき、

$e^a = 1$ を満たす正の数 a は存在しないので、a_1 は存在しない.

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(a_n - \log n) &= \lim_{n\to\infty}\left\{\log\left(2n-1+2\sqrt{n^2-n}\right) - \log n\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\log\frac{2n-1+2\sqrt{n^2-n}}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\log\frac{2-\frac{1}{n}+2\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{1} \\ &= 2\log 2 \end{aligned}$$