1

(1)	ア	4
	イ	2
	ウ	5
(2)	エ	3
	オ	4
	カ	1
	キ	2

2

ク	3
ケ	2
コ	3
サ	3
シ	6
ス	3
セ	6
ソ	4
タ	1
チ	3

3

(1) 三角形の成立条件より

$|AC-AB|<BC<AC+AB \iff 0<x<4 \cdots ①$

この条件の下で, 内接円の中心を O, 半径を r とおくと,

$$\triangle ABC=\triangle ABO+\triangle ACO+\triangle BCO$$
$$=\frac{1}{2}(AB+AC+BC)r$$
$$=\left(2+\frac{1}{2}x\right)r \cdots ②$$

$\angle ABC=\theta$ とおくと, $\cos\theta=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot BC}{AB}=\dfrac{x}{4}$ なので, $0<\theta<\pi$ より

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{16-x^2}}{4}$$

$$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\theta=\frac{x\sqrt{16-x^2}}{4}\cdots ③$$

②, ③より, 求めるべき内接円の半径は

$$r=\frac{\frac{1}{4}x\sqrt{16-x^2}}{2+\frac{1}{2}x}=\frac{x\sqrt{16-x^2}}{2(x+4)}\cdots(\text{答})$$

(2) 内接円の面積を $f(x)$ (ただし①より $0<x<4$)とおくと,

$$f(x)=\pi\cdot r^2=\pi\cdot\frac{x^2(16-x^2)}{4(x+4)^2}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{-x^3+4x^2}{x+4}$$

$$f'(x)=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\left(-3x^2+8x\right)(x+4)-\left(-x^3+4x^2\right)\cdot 1}{(x+4)^2}$$
$$=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x\left(x^2+4x-16\right)}{(x+4)^2}$$

$f'(x)=0$ とすると, ①より $x=-2+2\sqrt{5}$

$$f(-2+2\sqrt{5})=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\left(-2+2\sqrt{5}\right)^2\left(6-2\sqrt{5}\right)}{2+2\sqrt{5}}$$
$$=2\pi\left(5\sqrt{5}-11\right)$$

より増減表は次のようになる.

x	0	$\cdots$	$-2+2\sqrt{5}$	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$2\pi\left(5\sqrt{5}-11\right)$	$\searrow$	

①と増減表より, $\triangle ABC$ の内接円の面積は

$x=-2+2\sqrt{5}$ のとき最大値 $2\pi\left(5\sqrt{5}-11\right)$ をとる. $\cdots$(答)

4

(1) $V=\pi\int_{-2t}^{-t}x^2dy$

$$=\pi\int_{-2t}^{-t}e^{2y}dy \qquad (\because y=\log x)$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_{-2t}^{-t}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(e^{-2t}-e^{-4t}\right)\cdots(\text{答})$$

(2) $V=f(t)$とおくと，

$$f'(t)=\frac{\pi}{2}\left\{-2e^{-2t}-(-4)e^{-4t}\right\}$$

$$=\pi\cdot\frac{2-e^{2t}}{e^{4t}}$$

$f'(t)=0$ とおくと，$e^{2t}=2$ より $t=\dfrac{1}{2}\log 2$

したがって，$t>0$における$f(t)$の増減表は下のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}\log 2$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{2}\log 2\right)$	$\searrow$

増減表より，求めるべきVの最大値は

$$f\left(\frac{1}{2}\log 2\right)=\frac{\pi}{2}\left(e^{-2\cdot\frac{1}{2}\log 2}-e^{-4\cdot\frac{1}{2}\log 2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(e^{\log\frac{1}{2}}-e^{\log\frac{1}{4}}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{8}\cdots(\text{答})$$

5

(1) $$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\cdot1-\sin\theta\cdot0\\ \sin\theta\cdot1+\cos\theta\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

なので，点Q の座標は $\mathrm{Q}(\cos\theta, \sin\theta)$ …(答)

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cos\theta+\sin\theta\\ \cos\theta+\sin\theta\end{pmatrix}$$

なので，点R の座標は $\mathrm{R}(3\cos\theta+\sin\theta\,,\ \cos\theta+\sin\theta)$ …(答)

(2) $$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OQR}&=\frac{1}{2}\left|\sin\theta(3\cos\theta+\sin\theta)-\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta)\right|\\&=\frac{1}{2}\left|2\sin\theta\cos\theta-(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\right|\\&=\frac{1}{2}\left|\sin2\theta-\cos2\theta\right|\\&=\frac{1}{2}\left|\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right|\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\sin2\left(\theta-\frac{\pi}{8}\right)\right|\end{aligned}$$ …(答)

(3) △OQR が最大値をとるのは，(2) の結果より，θ が

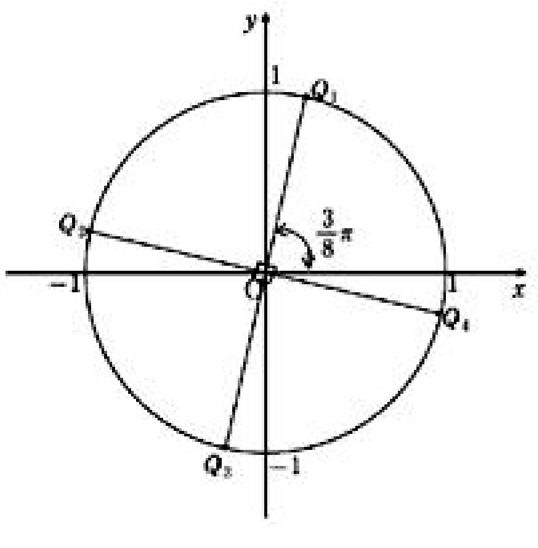
$$2\left(\theta-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{2}+n\pi \qquad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots\cdots)$$

を満たすときで，$0\leqq\theta<2\pi$ より $-\frac{\pi}{4}\leqq2\left(\theta-\frac{\pi}{8}\right)<\frac{15}{4}\pi$ なので，

△OQR の最大値を与える θ は

$$2\left(\theta-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi$$

$$\therefore\ \theta=\frac{3}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi$$ …(答)



対応する点 Q の位置は，Qの値を代入することで右の図の Q_1～Q_4 の 4 点になる．

△OQR の最大値は $\left|\sin2\left(\theta-\frac{\pi}{8}\right)\right|=1$

より $\frac{\sqrt{2}}{2}$ となる．…(答)