2007年度 E

数　　学

注　意

1. 問題は全部で8ページである.
2. 解答用紙に氏名・受験番号を忘れずに記入すること.（ただし，マーク・シートにはあらかじめ受験番号がプリントされている.）
3. 解答はすべて解答用紙に記入すること.
4. 解答用紙は必ず提出のこと.［問題は提出する必要はない.］

マーク・シート記入上の注意については，この問題冊子の裏表紙に記載されているので試験開始までに確認すること．ただし，冊子は開かないこと.

マーク・シート記入上の注意

1. 解答用紙(その1)はマーク・シートになっている．ＨＢの黒鉛筆またはシャープペンシルを用いて記入すること．
2. 解答用紙にあらかじめプリントされた受験番号を確認すること．
3. 解答用紙をよごしたり折り曲げたりしないこと．

問題の $\boxed{\text{アイ}}$ ，$\boxed{\text{キ}}$ などの $\boxed{}$ には，ある整数が入る．これらを次の方法で解答欄に解答せよ．

(1) ア，イ，ウ，…のひとつひとつは，それぞれ0から9までの数字，または，−，±，＊のいずれかひとつに対応する．それらをア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークする．

マークは，○を塗りつぶすことによっておこなう．訂正するときは，消しゴムで完全に消すこと．╳をつけても，消したことにならない．

〔例〕 $\boxed{\text{アイ}}$ に−7と答えたいとき

ア	●	⊕	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⊛
イ	⊖	⊕	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	●	⑧	⑨	⊛

〔例〕 $\boxed{\text{ウエ}}$ に38と答えたいとき

ウ	⊖	⊕	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⊛
エ	⊖	⊕	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	●	⑨	⊛

(2) 解答欄が余るときは，余った欄(後の方を余らす)に＊をマークする．

〔例〕 $\boxed{\text{オカキ}}$ に4と答えたいとき

オ	⊖	⊕	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⊛
カ	⊖	⊕	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	●
キ	⊖	⊕	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	●

(3) 解答欄が不足するときは，最後の欄に＊を付加する(この場合，最後の欄には2つのマークが入ることになる)．

〔例〕 $\boxed{\text{クケ}}$ に−365と答えたいとき

ク	●	⊕	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⊛
ケ	⊖	⊕	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	●

(4) 解答欄に適合するものがないときは，その欄に＊をマークする．

〔例〕 $\boxed{\text{コサ}}$ に対して問題が

$x^2+1<0$ ならば $x \geqq \boxed{\text{コサ}}$

のとき

コ	⊖	⊕	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	●
サ	⊖	⊕	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	●

(5) 以上により，どの欄にもかならずマークが入ることになる．記入のない欄は，解答放棄とみなされる．

(6) 分数形で解答するときは既約分数とし，符号は分子につけること．

(7) 平方根はできるだけ開く．〔例〕 $\sqrt{8}$ は $2\sqrt{2}$ とする．

$\boxed{\text{I}}$ 以下の問題については **解答用紙 (その 1) を使用すること**.

(1) 12 個のボールを 3 人で a, b, c 個に分ける.

1. 配分されない人も認めるときには $\boxed{\text{アイ}}$ 通りの異なる配分方法があるが, 全員が少なくとも 1 つを受取るときには, 異なる配分方法は $\boxed{\text{ウエ}}$ 通りである.
2. $a = b \geqq 1,\ c \geqq 1$ となる配分方法は $\boxed{\text{オ}}$ 通りである.
3. $a > b \geqq 1,\ c \geqq 1$ となる配分方法は $\boxed{\text{カキ}}$ 通りである.

(2) 1 から 20 までの整数が 1 つずつ記された 20 枚のカードがある. 事象 A, B をそれぞれ「2 の倍数」,「5 の倍数」を表すものとする.

1. 20 枚のカードから 1 枚を引くとき, それが 2 の倍数となる確率は $P(A) = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$, 5 の倍数となる確率は $P(B) = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である. さらに,
$$P(A \cap B) = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}, \qquad \text{および} \qquad P(A \cup B) = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$
である.
2. 元に戻しながら 3 枚のカードを引くとき, そのうちのちょうど 1 枚が 5 の倍数 (B) となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シスセ}}}$ である. また 1 枚が「2 の倍数でない 5 の倍数 $(\overline{A} \cap B)$」, 1 枚が「5 の倍数でない 2 の倍数 $(A \cap \overline{B})$」, 1 枚が「2 の倍数でも 5 の倍数でもない $(\overline{A} \cap \overline{B})$」となる事象の確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チツテ}}}$ である.
3. 20 枚のカードから, 元に戻さずに 2 枚を引くとき, 2 枚目が 5 の倍数となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である. また 1 枚目が 5 の倍数であるときに 2 枚目も 5 の倍数となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ である.
4. 1 枚目のカードを引いて, それを伏せたままで 2 枚目のカードを引いたところ, 5 の倍数であった. 1 枚目のカードが 5 の倍数である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$ である.

〔計　算　余　白〕

$\boxed{\text{II}}$ 以下の問題については **解答用紙 (その１) を使用すること**.

(1) 実数 x, y が

$$(\log_3 x)^2 + (\log_3 y)^2 = \log_3 x^2 - \log_3 y^2$$

を満たすとき，$\log_3 x$，xy，$\dfrac{x}{y}$ のとりうる値の範囲はそれぞれ

$$\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イ}}} \leqq \log_3 x \leqq \boxed{\text{ウ}} + \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$

$$\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \leqq xy \leqq \boxed{\text{キ}}, \qquad \boxed{\text{ク}} \leqq \frac{x}{y} \leqq \boxed{\text{ケコ}}$$

である.

(2) $x \geqq 0$ の範囲で関数

$$f(x) = 9^x + 9^{-x} - 2\,(3 + 3^{-1})(3^x + 3^{-x}) + (3 + 3^{-1})^2$$

を定義する.

1. $t = 3^x + 3^{-x}$ とおくとき，t は $x = \boxed{\text{ア}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{イ}}$ をとる.
2. $f(x)$ は $x = \boxed{\text{ウ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{エオ}}$ をとる.

(3) 半径 1 の球 Q がある.

1. Q の体積は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi$，表面積は $\boxed{\text{ウ}}\,\pi$ である.
2. Q を含む円柱のうち体積が最小のものを R とする.
   R の体積は $\boxed{\text{エ}}\,\pi$，表面積は $\boxed{\text{オ}}\,\pi$ である.
3. Q に含まれる円柱のうち体積が最大のものを S とする.
   S の体積は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$，表面積は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}} + \boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi$ である.

〔計 算 余 白〕

$\boxed{\text{III}}$ 以下の問題については **解答用紙 (その１) を使用すること**.

(1) 多項式 $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ で多項式 $f(x) = x^6 + 6x^3 + 5x^2 - 4x + 8$ を割ると，商が $g(x)$，余りが $5x^2 - 4x - 1$ となる．

このとき，$a = \boxed{ア}$ ，$b = \boxed{イ}$ ，$c = \boxed{ウ}$ である．

(2) $x + y + z = 2,\ x - y - 3z = 0$ を満たす x, y, z の任意の値に対して，常に

$$\alpha(x-2)^2 = \beta(y-2)^2 + \gamma(z-2)^2 - 15$$

が成立する．このとき，

$$\alpha = \boxed{アイ}, \quad \beta = \boxed{ウ}, \quad \gamma = \boxed{エ}$$

である．

(3) 複素数に関する以下の問いで i は虚数単位を表す．

1. $\alpha = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とするとき，$\alpha + \alpha^2 = \boxed{アイ}$ ，$\alpha^{16} + \alpha^8 + 2 = \boxed{ウ}$ である．
2. $\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$ とするとき，$\beta^4 = \boxed{エオ}$ ，$\beta + \beta^5 = \boxed{カ}$ である．
3. $\gamma = 2 + \sqrt{2}i$ とするとき，$\gamma^4 - 4\gamma^3 + 5\gamma^2 + 6\gamma - 7 = \boxed{キ} + \boxed{ク}\sqrt{2}i$ である．

〔計　算　余　白〕

$\boxed{\text{IV}}$ 以下の問題については **解答用紙 (その２) を使用すること**.

実数 $a > 0$ に対して $f(a) = \dfrac{1}{a}$ と表すとき，以下の問いに答えよ.

(1) $0 < a < b$ のとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} > f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)$$

(2) $0 < a < b,\, 0 < w < 1$ のとき，次の不等式を証明せよ.

$$w\,f(a) + (1-w)\,f(b) > f\Big(w\,a + (1-w)\,b\Big)$$

(3) $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ のとき，$n \geqq 2$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i) > f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$$

このことを数学的帰納法で証明せよ.

〔計　算　余　白〕