

I

(1)

アイ	91
ウエオ	512
カキ	32
ク	4

(2)

$\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$	$\frac{3}{2}$
ウ, エ, オ	2, 1, 2
$\frac{\text{カ}}{\text{キ}}, \text{ク}$	$\frac{1}{2}, 1$
$\frac{\text{ケコ}}{\text{サシ}}$	$\frac{17}{12}$

(3)

ア, イ, ウ, エ, オ	1, 2, 3, 2, 4
カ, キ, ク	3, 2, 1
ケ, $\frac{\text{コ}}{\text{サ}}$	$0, \frac{1}{3}$

II

(1)

アイウ	216
エオ	36
カキ	20

(2)

$\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$	$\frac{4}{9}$
$\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$	$\frac{2}{9}$
$\frac{\text{オ}}{\text{カキ}}$	$\frac{4}{27}$
$\frac{\text{クケ}}{\text{コサ}}$	$\frac{10}{27}$
$\frac{\text{シ}}{\text{スセ}}$	$\frac{8}{27}$

(3)

ア, イ	2, 2
ウ	4
エ	3
オ	6
カ	9

(4)

アイ, ウ, エ	-2, 0, 2
----------	----------

(5)

ア	3
イウ	-1
$\frac{\text{エ}}{\text{オ}}$	$\frac{5}{3}$
カキ	-2

III

(1)

$\frac{\text{アイ}}{\text{ウエ}}, \frac{\text{オカ}}{\text{キク}}, \frac{\text{ケコ}}{\text{サシ}}$	$\frac{12}{49}, \frac{18}{49}, \frac{36}{49}$
$\frac{\text{ス}\sqrt{\text{セソ}}}{\text{タチ}}$	$\frac{6\sqrt{13}}{13}$

(2)

$\frac{\text{ア}\sqrt{\text{イ}}}{\text{ウ}}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$
エ, オ	$2, 3$
カ, キ, ク	$2, 3, 1$

(3)

ア, イ	$1, 3$
ウエ, オ	$-1, 3$
カ, キ	$8, 8$

IV

(1)

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{1}{2}x_2\right) \\
 &> \frac{1}{2}f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{1}{2}f(x_2) \\
 &> \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)\right) + \frac{1}{2}f(x_2) \\
 &= \frac{1}{4}f(x_1) + \frac{3}{4}f(x_2)
 \end{aligned}$$

よって示された.

(2)

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{1}{8}x_1 + \frac{7}{8}x_2\right) &= f\left(\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + x_2}{2}\right) \\
 &> \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{1}{2}x_2\right) + \frac{1}{2}f(x_2) \\
 &> \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}f(x_1) + \frac{3}{4}f(x_2)\right) + \frac{1}{2}f(x_2) \\
 &= \frac{1}{8}f(x_1) + \frac{7}{8}f(x_2)
 \end{aligned}$$

よって示された.

(3)

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{3}{8}x_1 + \frac{5}{8}x_2\right) &= f\left(\frac{\frac{\frac{x_1+x_2}{2} + x_1}{2} + x_2}{2}\right) \\
 &> \frac{1}{2}f\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2} + x_1}{2}\right) + \frac{1}{2}f(x_2) \\
 &> \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{1}{2}f(x_1)\right) + \frac{1}{2}f(x_2) \\
 &> \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)\right) + \frac{1}{4}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) \\
 &= \frac{3}{8}f(x_1) + \frac{5}{8}f(x_2)
 \end{aligned}$$

よって示された.

(4)

数学的帰納法を用いて証明する.

(i) $k=1$ のとき

$m < 2^1 = 2$ であるので $m=1$ である.

よってこのとき $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$ となり,

$$\begin{aligned}
 \text{左辺} &= f\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) \\
 &> \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) = \text{右辺}
 \end{aligned}$$

よって成立する.

(ii) $k=l$ のとき $w_1 = \frac{m}{2^l}$, $w_2 = \frac{2^l - m}{2^l}$ であるので,

$$f\left(\frac{m}{2^l}x_1 + \frac{2^l - m}{2^l}x_2\right) > \frac{m}{2^l}f(x_1) + \frac{2^l - m}{2^l}f(x_2)$$

が成立すると仮定して $k=l+1$ のときの

$$f\left(\frac{m}{2^{l+1}}x_1 + \frac{2^{l+1} - m}{2^{l+1}}x_2\right) > \frac{m}{2^{l+1}}f(x_1) + \frac{2^{l+1} - m}{2^{l+1}}f(x_2)$$

が成立することを示す.

w_1, w_2 の定義より,

$$\begin{aligned}
 \text{左辺} &= f\left(\frac{m}{2^{l+1}}x_1 + \frac{2^{l+1} - m}{2^{l+1}}x_2\right) \\
 &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2^l}x_1 + \frac{2^l - m}{2^l}x_2\right) + \frac{1}{2}x_2\right)
 \end{aligned}$$

ここで, $\frac{m}{2^l}x_1 + \frac{2^l - m}{2^l}x_2 \neq x_2$ を確認する.

$x_1 \neq x_2$ より, $x_1 = x_2 + \alpha$ ($\alpha \neq 0$) とおけて,

$$x_2 - \frac{2^l - m}{2^l}x_2 = \frac{m}{2^l}x_2 = \frac{m}{2^l}x_1 - \frac{m}{2^l}\alpha$$

よって,

$$x_2 = \frac{m}{2^l}x_1 + \frac{2^l - m}{2^l}x_2 - \frac{m}{2^l}\alpha$$

であるから,

$$x_2 \neq \frac{m}{2^l}x_1 + \frac{2^l - m}{2^l}x_2$$

$$\begin{aligned}
 \text{左辺} &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2^l}x_1 + \frac{2^l - m}{2^l}x_2\right) + \frac{1}{2}x_2\right) \\
 &> \frac{1}{2}f\left(\frac{m}{2^l}x_1 + \frac{2^l - m}{2^l}x_2\right) + \frac{1}{2}f(x_2) \\
 &> \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2^l}f(x_1) + \frac{2^l - m}{2^l}f(x_2)\right) + \frac{1}{2}f(x_2) \\
 &\quad (\because \text{仮定より}) \\
 &= \frac{m}{2^{l+1}}f(x_1) + \frac{2^l - m}{2^{l+1}}f(x_2) + \frac{2^l}{2^{l+1}}f(x_2) \\
 &= \frac{m}{2^{l+1}}f(x_1) + \frac{2^{l+1} - m}{2^{l+1}}f(x_2) = \text{右辺}
 \end{aligned}$$

よって成立する.

(i),(ii) より与式は示された.