

1

ア	$2 < a < 3$
イ	7
ウ	$20\sqrt{3}$
エ	$\frac{40\sqrt{3}}{7}$

$t = 2^x + 2^{-x}$ と置く.

$2^x > 0, 2^{-x} > 0$ であるので, 相加相乗平均の関係より,

$$t = 2^x + \frac{1}{2^x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot \frac{1}{2^x}} = 2$$

等号成立は $2^x = \frac{1}{2^x}$, すなわち $x = 0$ のとき.

$$\begin{aligned} f(x) &= 4^x + 4^{-x} - a(2^x + 2^{-x}) + a^2 \\ &= (2^x + 2^{-x})^2 - a(2^x + 2^{-x}) + a^2 - 2 \end{aligned}$$

であるから t で表して $g(t)$ と表記すれば,

$$g(t) = t^2 - at + a^2 - 2$$

となる.

よって $g(t)$ の $t \geq 2$ における最小値を求めればよい.

(i) $\frac{a}{2} \geq 2$, すなわち $a \geq 4$ のとき

最小値は頂点の y 座標となり, $\frac{3}{4}a^2 - 2$

(ii) $\frac{a}{2} \leq 2$, すなわち $a \leq 4$ のとき

最小値は $t = 2$ のときで, $g(2) = a^2 - 2a + 2$

(i), (ii) より

$$(\text{答}) \begin{cases} \frac{3}{4}a^2 - 2 & (a \geq 4 \text{ のとき}) \\ a^2 - 2a + 2 & (a \leq 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

3

(1)

条件は $f'(x) = 0$ が異なる 2 解を持つ条件と同値.

$f'(x) = 3x^2 + 6x + a$ であるので, 判別式を D と置けば,

$$D = 36 - 12a > 0$$

よって

(答) $a < 3$

(2)

$f'(x) = 3x^2 + 6x + a$ より $3x^2 + 6x + a = 0$ の 2 解が α, β である.
解と係数の関係から,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2 \\ \alpha\beta = \frac{a}{3} \end{cases}$$

である. これらから,

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 4 - 2 \cdot \frac{a}{3} \\ &= \frac{12 - 2a}{3} \\ \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &= -8 + 6 \cdot \frac{a}{3} \\ &= 2a - 8 \end{aligned}$$

よって,

(答) $\alpha + \beta = -2, \alpha^2 + \beta^2 = \frac{12 - 2a}{3}, \alpha^3 + \beta^3 = 2a - 8$

(3)

条件は (1) の範囲の元で $f(\alpha) + f(\beta) = 28$ となる a を求めることと同値である.

$$\begin{aligned} f(\alpha) + f(\beta) &= \alpha^3 + 3\alpha^2 + a\alpha + a^2 + \beta^3 + 3\beta^2 + a\beta + a^2 \\ &= (\alpha^3 + \beta^3) + 3(\alpha^2 + \beta^2) + a(\alpha + \beta) + 2a^2 \\ &= 2a - 8 + 12 - 2a - 2a + 2a^2 \\ &= 2a^2 - 2a + 4 = 28 \end{aligned}$$

$$a^2 - a - 12 = 0$$

$$(a - 4)(a + 3) = 0$$

$$a = 4, -3$$

(1) より $a < 3$ であるから,

(答) $a = -3$