

$$(1) \quad \frac{2}{5}$$

$$(2) \quad \frac{91}{300}$$

$$(3) \quad \frac{29}{180}$$

- (1) A の引く最大の数よりも小さいカードの内 (但し A の引いた 1 枚を除く) から 3 枚を B が引けばよい. その確率は,

$$\frac{9 \cdot {}_8C_3 + 8 \cdot {}_7C_3 + 7 \cdot {}_6C_3 + 6 \cdot {}_5C_3 + 5 \cdot {}_4C_3 + 4 \cdot {}_3C_3}{{}_{10}C_2 \cdot {}_8C_3} = \frac{2}{5}$$

(2)

$$\frac{9 \cdot {}_9C_3 + 8 \cdot {}_8C_3 + 7 \cdot {}_7C_3 + 6 \cdot {}_6C_3 + 5 \cdot {}_5C_3 + 4 \cdot {}_4C_3 + 3 \cdot {}_3C_3}{{}_{10}C_2 \cdot {}_{10}C_3} = \frac{91}{300}$$

- (3) B は A の引いた最大の数のカードとそれよりも小さい 2 枚のカードを引けばよい. その確率は,

$$\frac{9 \cdot {}_9C_2 + 8 \cdot {}_8C_2 + 7 \cdot {}_7C_2 + 6 \cdot {}_6C_2 + 5 \cdot {}_5C_2 + 4 \cdot {}_4C_2 + 3 \cdot {}_3C_2 + 2 \cdot {}_2C_2}{{}_{10}C_2 \cdot {}_{10}C_3} = \frac{29}{180}$$

2

(1)  $\frac{4}{5}$

(2) 4

(3)  $\frac{9}{5}$

(1)

余弦定理より

$$\cos \angle A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$$

(2)

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \angle A$$

(3)

$$|\overrightarrow{AB} - t\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 - 2t\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} + t^2|\overrightarrow{AC}|^2 = 5t^2 - 8t + 5$$

(1)

$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$  とおくと

$$f(x-1) = \alpha x^3 + (-3\alpha + \beta)x^2 + (3\alpha - 2\beta + \gamma)x + (-\alpha + \beta - \gamma + \delta)$$

$$f(x+1) = \alpha x^3 + (3\alpha + \beta)x^2 + (3\alpha + 2\beta + \gamma)x + (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

よって、

$$\begin{aligned} f(x+1) + 2f(x) + f(x-1) &= 4\alpha x^3 + 4\beta x^2 + (6\alpha + 4\gamma)x + (2\beta + 4\delta) \\ &= 8x^3 + 8ax^2 + 12ax + 4 \end{aligned}$$

このとき、与式が恒等式となるので、

$$\alpha = 2 \qquad \beta = 2a \qquad \gamma = 3(a-1) \qquad \delta = -a + 1$$

故に、

$$f(x) = 2x^3 + 2ax^2 + 3(a-1)x - a + 1$$

(2)

$f'(x) = 0$  が実数解を持たないか、重解をもてばよい。ここで、

$$f'(x) = 6x^2 + 4ax + 3(a-1)$$

$f'(x) = 0$  の判別式を  $D$  とおくと、

$$D/4 = 4a^2 - 18(a-1) = 2(a-3)(2a-3) \leq 0$$

$$\therefore \frac{3}{2} \leq a \leq 3$$

4

(1)

円  $S_1$  の半径  $r_1$  は、

$$r_1 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2}{1+1+1} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

よって、

$$m_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 \pi = \frac{\pi}{12}$$

(2)

BC に平行で、円  $S_1$ 、 $S_2$  の共通接線となる線分を  $B'C'$  (点  $B'$ 、 $C'$  はそれぞれ AB、AC 上) とする。このとき、線分  $B'C'$  の中点を  $M'$  とおくと、

$$AM' = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

ここで、 $\triangle ABC$  と  $\triangle AB'C'$  は相似で、その相似比は 3 : 1. 故に、円  $C_2$  の半径  $r_2$  は、

$$r_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{18}$$

よって、

$$m_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{18}\right)^2 \pi = \frac{\pi}{108}$$

(3)

円  $S_n$  と円  $S_{n+1}$  についても (2) と同様のことがいえる。よって、

$$m_{n+1} = \frac{1}{9} m_n$$

故に、

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n = \frac{\frac{\pi}{12}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{32} \pi$$

5

(1)

$$f'(x) = a^2 (ax - 1) e^{ax}$$

よって、 $f(x)$  は  $x = 1/a$  のとき極小かつ最小となる。また、最小値は

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = -ae$$

(2)

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^a f(x) dx \\ &= \left[ \frac{1}{a} (a^2 - 2a) e^{ax} \right]_0^a - \int_0^a a e^{ax} dx \\ &= \left[ ((ax - 2) - 1) e^{ax} \right]_0^a \\ &= \left[ (ax - 3) e^{ax} \right]_0^a \\ &= (a^2 - 3) e^{a^2} + 3 \end{aligned}$$

(3)

$$S'(a) = 2a(a^2 - 2)e^{a^2}$$

よって、 $a = \sqrt{2}$  のとき極小かつ最小. このとき最小値は、

$$S(\sqrt{2}) = (2 - 3)e^2 + 3 = -e^2 + 3$$