

1

ア	6
イ	$\frac{13}{3}$
ウ	$\frac{56}{65}$
エ	$-\frac{33}{82}$
オ	$\frac{297}{82}$

(1)

$y' = 2x$ であるので A における接線の傾きは $2a$

条件より $2a = -2$, すなわち $a = -1$ となる.

同様に B における接線の傾きは $2b$ であり,

条件より $2b = \frac{1}{2}$, すなわち $b = \frac{1}{4}$ となる.

(答) $a = -1, b = \frac{1}{4}$

(2)

点 P を通る傾き -2 の直線は $y = -2x + t^2 + 2t$, よって $y = x^2$ と連立して点 Q を求めると $(x, y) = (-2 - t, t^2 + 4t + 4)$ となる.

また点 P を通る傾き $\frac{1}{2}$ の直線は $y = \frac{1}{2}x + t^2 - \frac{1}{2}t$, $y = x^2$ と連立して

点 R を求めると $(x, y) = \left(-t + \frac{1}{2}, t^2 - t + \frac{1}{4}\right)$ となる.

直線 PQ と点 R との距離は点と直線の距離公式より,

$$\frac{\left|2\left(-t + \frac{1}{2}\right) + t^2 - t + \frac{1}{4} - t^2 - 2t\right|}{\sqrt{4+1}} = \frac{\sqrt{5}}{4}(-4t+1)$$

となる.

また $PQ = \sqrt{(t+2+t)^2 + (-4t-4)^2} = 2\sqrt{5}(t+1)$ であるので, 面積は

$$\frac{\sqrt{5}}{4}(-4t+1) \cdot 2\sqrt{5}(t+1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4}(-4t^2 - 3t + 1)$$

(答) $\frac{5}{4}(-4t^2 - 3t + 1)$

(3)

$-1 < t < \frac{1}{4}$ で (2) で求めた面積の最大値を求めればよい.
面積を $f(t)$ と置くと,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{5}{4}(-4t^2 - 3t + 1) \\ &= \frac{5}{4} \left\{ -4 \left(t + \frac{3}{8} \right)^2 + \frac{25}{16} \right\} \end{aligned}$$

となるので, $t = -\frac{3}{8}$ のとき最大値をとる. よって,

(答) $t = -\frac{3}{8}$ のとき最大値 $\frac{125}{64}$

(1)

$$\begin{aligned}
 t^2 &= \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x \\
 &= 1 + 2 \sin x \cos x \\
 \sin x \cos x &= \frac{1}{2} (t^2 - 1)
 \end{aligned}$$

であることを用いると,

$$\begin{aligned}
 y &= (\sin x + \cos x)^3 - 3 \sin x \cos x (\sin x + \cos x) + \sin x \cos x - (\sin x + \cos x) \\
 &= t^3 - \frac{3}{2}t(t^2 - 1) + \frac{1}{2}(t^2 - 1) - t \\
 &= -\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \cdots (\text{答})
 \end{aligned}$$

となる.

(2)

$t = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ より $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ である.

$y' = -\frac{3}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}$ であるので $y' = 0$ となるのは $t = -\frac{1}{3}, 1$ のときである.

よって増減表は以下のようになる.

t	$-\sqrt{2}$		$-\frac{1}{3}$		1		$\sqrt{2}$
y'		-	0	+	0	-	
y	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$-\frac{16}{27}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

よって,

$$(\text{答}) \begin{cases} \text{最大値} & \frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ \text{最小値} & -\frac{16}{27} \end{cases}$$