

1

$$(1) \quad \boxed{\text{ア}} \frac{1}{2} \quad \boxed{\text{イ}} \frac{7}{2}$$

$$(2) \quad \boxed{\text{ウ}} \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{3}$$

(1)

得点が 0 となるのは、2 個の目がともに偶数であるか、偶数と奇数の目が 1 個ずつ出るときで、その確率は $1/2$.

また、得点が 3 以上のときのそれぞれの得点における目の組は以下のとおり。

得点	確率
3	(1,2), (2,1)
5	(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)
7	(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)
9	(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)
11	(5,6), (6,5)

よって、期待値は

$$\frac{2}{36} \times 3 + \frac{4}{36} \times 5 + \frac{6}{36} \times 7 + \frac{4}{36} \times 9 + \frac{2}{36} \times 11 = \frac{7}{2}$$

(2)

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が直交するとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

ここで、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = t + (t+1)^2 + (t+2)(2t+1) = 3t^2 + 8t + 3$$

よって、 $t = \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{3}$.

2

(i) より $f'(1) = 0, f''(1) < 0$ であればよい。ここで、

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 + 2ax + b \\f''(x) &= 6x + 2a\end{aligned}$$

よって、

$$2a + b + 3 = 0 \quad (1)$$

$$2a + 6 < 0 \Leftrightarrow a < -3 \quad (2)$$

ここで、 $f(x)$ を $f'(x)$ で割った商を $\alpha x + \beta$ とおくと (ii) より、

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (\alpha x + \beta)(3x^2 + 2ax + b) - 8x + 5$$

このとき、

$$(\text{右辺}) = 3\alpha x^3 + (2a\alpha + 3\beta)x^2 + (b\alpha + 2a\beta - 8)x + b\beta + 5$$

これが恒等式となるので、

$$\begin{aligned}3\alpha &= 1 & 2a\alpha + 3\beta &= a \\b\alpha + 2a\beta - 8 &= b & b\beta + 5 &= c\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{3} & \beta &= \frac{a}{9} \\b &= \frac{1}{3}a^2 - 12 & c &= \frac{1}{27}a^3 - \frac{4}{3}a + 5\end{aligned}$$

これらを (1) に代入して整理すると、

$$a^2 + 6a - 27 = 0 \quad \therefore a = -9, 3$$

このとき、(2) より $a = -9$. また、 $b = 15, c = -10$.

(1)

直線 l の方程式は、 $y = mx + 2m$.

また円 C の方程式は、 $x^2 + y^2 = 1$.

これら 2 式から y を消去して、

$$x^2 + (mx + 2m)^2 = 1 \Leftrightarrow (m^2 + 1)x^2 + 4m^2x + 4m^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

ここで、直線 l が円 C と異なる 2 点で交わる時、(1) 式は 2 つの異なる実数解をもつ。(1) 式の判別式を D とおくと、

$$D/4 = 4m^2 - (m^2 + 1)(4m^2 - 1) = -3m^2 + 1 > 0$$

$$\therefore -\frac{1}{\sqrt{3}} < m < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$m = \tan \theta$ より、求める θ の範囲は、 $-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$.

(2)

$$(1) \text{ 式の解は } x = \frac{-2m^2 \pm \sqrt{-3m^2 + 1}}{m^2 + 1}.$$

このとき M の x 座標は $-\frac{2m^2}{m^2 + 1}$.

また、 M は直線 l 上にあるので、 M の座標は、

$$\left(-\frac{2m^2}{m^2 + 1}, \frac{2m}{m^2 + 1} \right)$$

これを θ で表して、

$$(-2\sin^2\theta, 2\sin\theta\cos\theta)$$

(3)

(2) の結果から、 $M(\cos 2\theta - 1, \sin 2\theta)$.

このとき M は $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ 上を動く。また、(1) の結果より $-\pi/6 < \theta < \pi/6$ なので、 x 座標の範囲は $-1/2 < x \leq 0$.

よって、 M の軌跡を図示すると右図のとおり（但し、端点は含まず）。

