

数 学

注 意

1. 問題は全部で8ページである.
2. 解答用紙に氏名・受験番号を忘れずに記入すること. (ただし, マーク・シートにはあらかじめ受験番号がプリントされている.)
3. 解答はすべて解答用紙に記入すること.
4. 解答用紙は必ず提出のこと. [問題は提出する必要はない.]

マーク・シート記入上の注意については, この問題冊子の裏表紙に記載されているので試験開始までに確認すること. ただし, 冊子は開かないこと.

Ⅰ 以下の問題については 解答用紙 (その 1) を使用すること。

(1) 奇数の数列 $1, 3, 5, \dots$ を, 第 n 群が n 個の奇数を含むように分ける.

$$\{1\}, \{3, 5\}, \{7, 9, 11\}, \{13, 15, 17, 19\}, \dots$$

- 第 10 群の最初の数 $\boxed{\text{アイ}}$ である.
- 第 8 群の数の和 $\boxed{\text{ウエオ}}$ である.
- 999 は第 $\boxed{\text{カキ}}$ 群の第 $\boxed{\text{ク}}$ 番目の数である.

(2) 関数 $f(x) = x^2 - 2$ を用いて数列を次のように定める. まず $a_0 = 2$ として $f(x)$ の $x = a_0$ における接線が x 軸と交わる点を a_1 とする. このとき $a_1 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である. 以下同様にして, $x = a_n$ における $f(x)$ の接線が x 軸と交わる点を a_{n+1} とする.

$f(x)$ の $x = a_n$ における接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{ウ}} a_n x - \left(\boxed{\text{エ}} a_n^2 + \boxed{\text{オ}} \right)$$

と表される. これから, a_{n+1} は a_n を用いて $a_{n+1} = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} a_n + \boxed{\text{ク}} a_n^{-1}$ と表される. 特に $a_2 = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である.

(3) a を実数とし, 2 次関数 $y = x^2 - (a+1)x + a^2 + a$ のグラフを C とする.

- C の頂点の座標は $\left(\frac{a + \boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \frac{\boxed{\text{ウ}} a^2 + \boxed{\text{エ}} a - 1}{\boxed{\text{オ}}} \right)$ である.
- C を x 軸の方向に 1, y 軸の方向に -1 だけ平行移動した放物線の方程式は $y = x^2 - (a + \boxed{\text{カ}})x + a^2 + \boxed{\text{キ}}a + \boxed{\text{ク}}$ である.
- C が x 軸の $0 < x < 1$ の部分と異なる 2 点で交わるための a の値の範囲は $\boxed{\text{ケ}} < a < \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である.

Ⅱ 以下の問題については 解答用紙(その1)を使用すること。

- (1) 赤, 青, 白の3個のサイコロを投げたとき, 可能な結果は全部で $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りあり, このうち赤と青の目が等しい場合は $\boxed{\text{エオ}}$ 通り, 赤と青の合計が白の目より小さい場合は $\boxed{\text{カキ}}$ 通りある。

- (2) サイコロを投げて, 1または6の目が出たら勝ちというゲームがある。このとき3回投げて1勝2敗となる確率は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$, 2勝1敗となる確率は $\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$, 3回目に初め

て勝つ確率は $\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

また, 勝ちまたは負けが3回になるまでゲームを続けるとき, 4回目で終了する確率は $\frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$, 4回でも終わらない確率は $\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ である。

- (3) 2次方程式 $x^2 - px + 2p = 0$ が整数解 α, β を持つとき, 解と係数の関係から, α と β には $\alpha\beta - \boxed{\text{ア}}\alpha - \boxed{\text{イ}}\beta = 0$ という関係が成り立つ。この式を満たす α, β の組合せ (ただし, $\alpha \leq \beta$) は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りある。このうち p を最大にする組合せは $\alpha = \boxed{\text{エ}}$, $\beta = \boxed{\text{オ}}$ であり, そのとき $p = \boxed{\text{カ}}$ となる。

- (4) 2次方程式 $x^2 + qx + q^2 = 4$ の解がいずれも整数であるとき, q のとりうる値は, 小さい順に $\boxed{\text{アイ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ である。

- (5) 関数 $f(\theta) = a \sin \theta + b \cos \theta$ は $\theta = \frac{2}{3}\pi$ のとき最大値2をとる。ただし $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

このとき $a = \sqrt{\boxed{\text{ア}}}$, $b = \boxed{\text{イウ}}$ である。

また $f(\theta)$ は $\theta = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi$ のとき最小値 $\boxed{\text{カキ}}$ をとる。

III 以下の問題については 解答用紙(その1)を使用すること.

- (1) 空間に3点 $A(3, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 1)$ がある.

このとき, 原点 O から平面 ABC に下ろした垂線の足を H とすると, H の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}, \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}, \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}} \right)$$

である.

また, 原点 O から直線 AB に下ろした垂線の足を R とすると, 線分 OR の長さは

$$\frac{\boxed{\text{ス}} \sqrt{\boxed{\text{セソ}}}}{\boxed{\text{タチ}}}$$

である.

- (2) 半径 1 の円に内接する正 6 角形の面積は $\frac{\boxed{\text{ア}} \sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である. また半径 1 の円に内接する正 12 角形の 1 辺の長さを ℓ とするとき

$$\ell^2 = \boxed{\text{エ}} - \sqrt{\boxed{\text{オ}}}, \quad \ell = \frac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{2} \left(\sqrt{\boxed{\text{キ}}} - \boxed{\text{ク}} \right)$$

である.

- (3) $z = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$, $w = \frac{5 - i}{2 - 3i}$ とするとき, $z^{11} = \frac{\boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イ}}}i}{2}$,

$$z^{2000} = \frac{\boxed{\text{ウエ}} - \sqrt{\boxed{\text{オ}}}i}{2}, \quad w^7 = \boxed{\text{カ}} - \boxed{\text{キ}}i \quad \text{である.}$$

Ⅳ 以下の問題については 解答用紙(その2)を使用すること.

2 次関数 $f(x) = -x^2$ や対数関数 $f(x) = \log_2 x$ などの関数は $x_1 \neq x_2$ のとき

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

という関係を満たす. この関係を用いて以下の性質を示せ. ただし, 以下ではすべて $x_1 \neq x_2$ とする.

$$(1) f\left(\frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2\right) > \frac{1}{4}f(x_1) + \frac{3}{4}f(x_2)$$

$$\text{ヒント: } \frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \frac{1}{2}x_2$$

$$(2) f\left(\frac{1}{8}x_1 + \frac{7}{8}x_2\right) > \frac{1}{8}f(x_1) + \frac{7}{8}f(x_2)$$

$$(3) f\left(\frac{3}{8}x_1 + \frac{5}{8}x_2\right) > \frac{3}{8}f(x_1) + \frac{5}{8}f(x_2)$$

(4) 任意の正の整数 k と 2^k より小さな正の整数 m に対して, $w_1 = \frac{m}{2^k}$,
 $w_2 = 1 - w_1$ (このとき $w_1 > 0$, $w_2 > 0$ である) とおくとき,

$$f(w_1x_1 + w_2x_2) > w_1f(x_1) + w_2f(x_2)$$

ヒント: k に関する数学的帰納法を用いよ.

マーク・シート記入上の注意

1. 解答用紙(その1)はマーク・シートになっている。HBの黒鉛筆またはシャープペンシルを用いて記入すること。
2. 解答用紙にあらかじめプリントされた受験番号を確認すること。
3. 解答用紙をよごしたり折り曲げたりしないこと。

問題の アイ , キ などの には、ある整数が入る。これらを次の方法で解答欄に解答せよ。

- (1) ア、イ、ウ、…のひとつひとつは、それぞれ0から9までの数字、または、－、＋、＊のいずれかひとつに対応する。それらをア、イ、ウ、…で示された解答欄にマークする。

マークは、○を塗りつぶすことによっておこなう。訂正するときは、消しゴムで完全に消すこと。×をつけても、消したことになるない。

〔例〕 アイ に－7と答えたいとき

ア	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
イ	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

〔例〕 ウエ に38と答えたいとき

ウ	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
エ	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

- (2) 解答欄が余るときは、余った欄(後の方を余らす)に＊をマークする。

〔例〕 オカキ に4と答えたいとき

オ	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
カ	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
キ	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

- (3) 解答欄が不足するときは、最後の欄に＊を付加する(この場合、最後の欄には2つのマークが入ることになる)。

〔例〕 クケ に－365と答えたいとき

ク	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
ケ	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

- (4) 解答欄に適合するものがないときは、その欄に＊をマークする。

〔例〕 コサ に対して問題が

$x^2 + 1 < 0$ ならば $x \geq$ コサ
のとき

コ	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
サ	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

- (5) 以上により、どの欄にもかならずマークが入ることになる。記入のない欄は、解答放棄とみなされる。
- (6) 分数形で解答するときは既約分数とし、符号は分子につけること。
- (7) 平方根はできるだけ開く。〔例〕 $\sqrt{8}$ は $2\sqrt{2}$ とする。