

1

①	12	②	$\frac{5}{2}$	③	$\frac{21}{2}$
④	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	⑤	$\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$		

(1)

$$\begin{aligned}
 y &= 3 \left\{ (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)^2 - 2 \sin^4 \theta \cos^4 \theta \right\} \\
 &\quad - 4 \left\{ (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right\} \\
 &\quad + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 &= 3 \left\{ (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right\}^2 \\
 &\quad - 6 \sin^4 \theta \cos^4 \theta - 4 + 10 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 &= 3 (1 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta)^2 - 4 - 6 \sin^4 \theta \cos^4 \theta + 10 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 &= -1 + 6 \sin^4 \theta \cos^4 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 &= -1 + \frac{3}{8} \sin^4 2\theta - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \\
 &= \frac{3}{8} t^4 - \frac{1}{2} t^2 - 1
 \end{aligned}$$

(2) $t = \sin 2\theta$ より, $-1 \leq t \leq 1$.

ここで, $\frac{dy}{dt} = \frac{3}{2}t^3 - t = \frac{3}{2}t \left(t + \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \left(t - \frac{\sqrt{6}}{3} \right)$.

よって, 増減表は以下のとおり.

t	-1	$\dots$	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\dots$	0	$\dots$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\dots$	1
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\frac{9}{8}$	$\searrow$	$-\frac{7}{6}$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{7}{6}$	$\nearrow$	$-\frac{9}{8}$

ゆえに, 最小値は $t = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$ のとき $-\frac{7}{6}$ で, 最大値は $t = 0$ のとき -1 .

$\int_0^1 |f(t)| dt = a$ とおくと,

$$f(x) = x - \frac{a}{2}x^2.$$

$\int_0^1 |f(t)| dt$ は, $0 \leq t \leq 1$ における曲線 $y = f(t)$ と t 軸との間の部分の面積なので, $a \geq 0$ としてよい.

i) $a = 0$ のとき $f(x) = x$

このとき,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 |f(t)| dt \\ &= \int_0^1 t dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となり, 不適.

ii) $0 < a \leq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(t)| dt &= \int_0^1 \left| t - \frac{a}{2}t^2 \right| dt \\ &= \int_0^1 \left(t - \frac{a}{2}t^2 \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{a}{6}t^3 \right]_0^1 \\ &= -\frac{a}{6} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } a = -\frac{a}{6} + \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{3}{7}.$$

$\therefore a > 2$ を満たす解をもたないので不適.

$$\text{以上より, } f(x) = x - \frac{3}{14}x^2$$

iii) $a > 2$ のとき

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(t)| dt &= \int_0^1 \left| t - \frac{a}{2}t^2 \right| dt \\ &= \int_0^{\frac{2}{a}} \left(t - \frac{a}{2}t^2 \right) dt + \int_{\frac{2}{a}}^1 \left(\frac{a}{2}t^2 - t \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{a}{6}t^3 \right]_0^{\frac{2}{a}} + \left[\frac{a}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \right]_{\frac{2}{a}}^1 \\ &= \frac{4}{3a^2} + \frac{a}{6} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \frac{4}{3a^2} + \frac{a}{6} - \frac{1}{2} = a$$

$$5a^3 + 3a^2 - 8 = 0$$

$$(a-1)(5a^2+8a+8)=0$$

$\therefore a > 2$ を満たす解をもたないので不適.

$$\text{以上より, } f(x) = x - \frac{3}{14}x^2$$