

1

7	4	イ	8	ウ	1	工	6
---	---	---	---	---	---	---	---

2

オ	0	カ	0	キ	3	ク	1	ケ	2
コ	2	サ	2	シ	5	ス	3	セ	4

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \overrightarrow{OG} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OQ} \\
 &= \left(\frac{1}{3}\cos s + \frac{1}{3}\cos t + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\sin s + \frac{1}{3}\sin t \right) \\
 &\text{したがって, } G \text{ の座標は} \\
 &\left(\frac{1}{3}(\cos s + \cos t + 1), \frac{1}{3}(\sin s + \sin t) \right).
 \end{aligned}$$

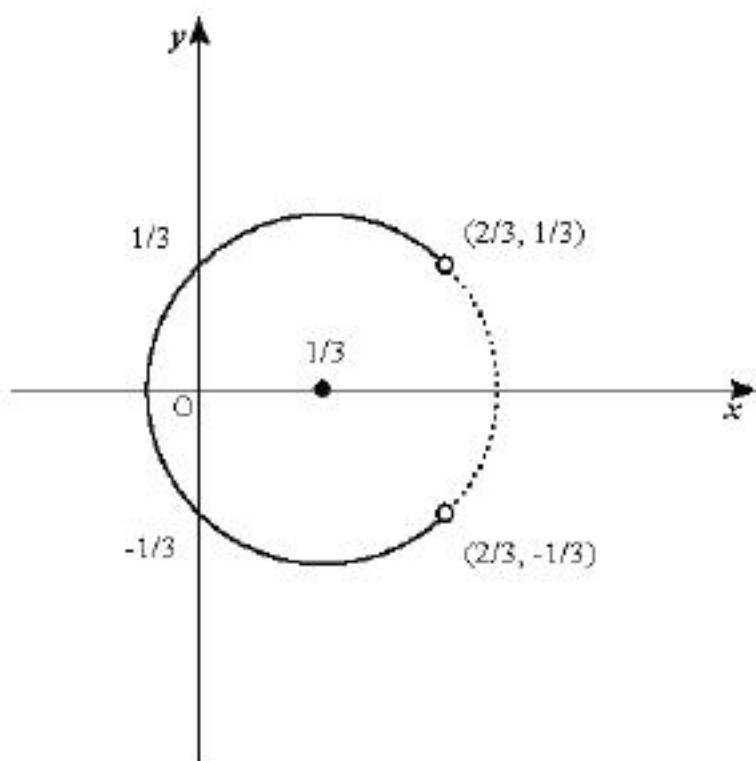
(2) G の x 座標を X , y 座標を Y とおき, (1) の結果に $s = t + \frac{\pi}{2}$ を代入すると,

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{1}{3}\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3}\cos t + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\sin t + \frac{1}{3}\cos t + \frac{1}{3} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{3}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{3} \\
 Y &= \frac{1}{3}\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3}\sin t = \frac{1}{3}\cos t + \frac{1}{3}\sin t \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{3}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)
 \end{aligned}$$

よって,

$$\left(X - \frac{1}{3}\right)^2 + Y^2 = \frac{2}{9}\cos^2\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{9}\sin^2\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{9}$$

ゆえに, G の軌跡は円 $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{2}{9}$ の一部で, その座標は t を用いて $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ と表せるので, $0 < t < \frac{3}{2}\pi$ のとき下図の実線部分 (両端は含まず) のようになる.



(1)

$$S_k = \frac{1}{2} OA \cdot OB_k \sin \angle AOB_k = \frac{k}{2} \sin \left(\frac{k}{2n} \pi \right)$$

(2)

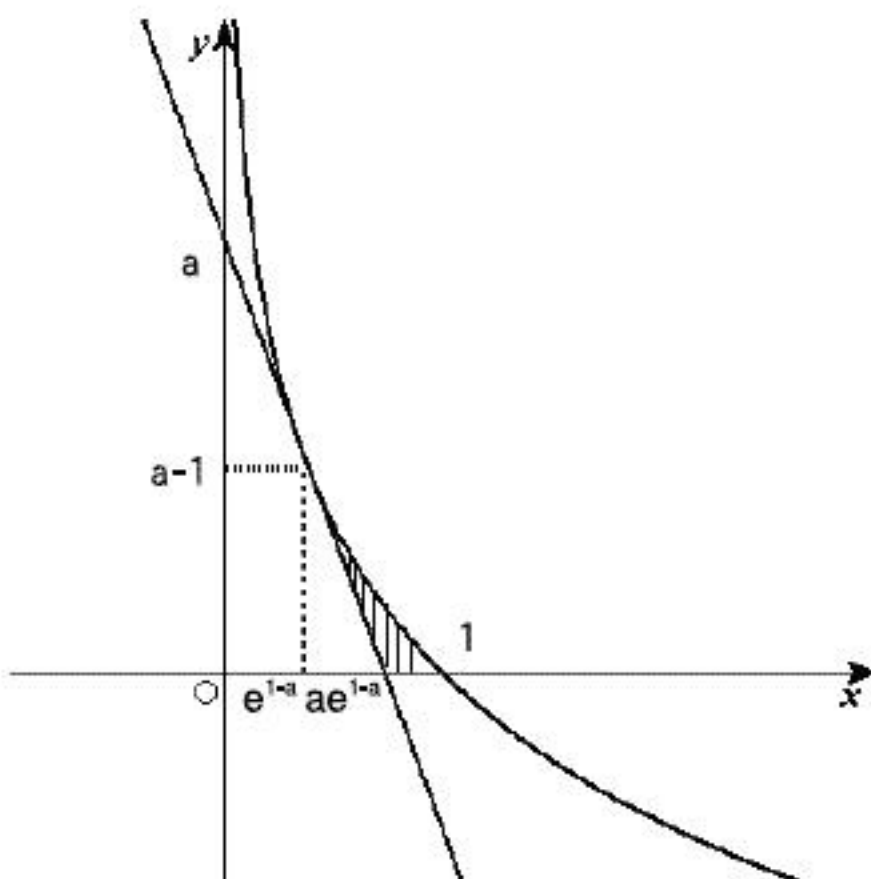
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n S_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2} \sin \left(\frac{k}{2n} \pi \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{n} \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{n} \right) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} x \sin \left(\frac{\pi}{2} x \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{\pi} x \cos \left(\frac{\pi}{2} x \right) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{\pi} \cos \left(\frac{\pi}{2} x \right) dx \\ &= \left[\frac{2}{\pi^2} \sin \left(\frac{\pi}{2} x \right) \right]_0^1 = \frac{2}{\pi^2} \end{aligned}$$

- (1) 接点の x 座標を t ($t > 0$) とおくと, $y' = -\frac{1}{x}$ より接線の方程式は,

$$y = -\frac{1}{t}(x - t) - \log t \iff y = -\frac{1}{t}x + 1 - \log t$$

これが点 $(0, a)$ を通るので, $a = 1 - \log t \quad \therefore t = e^{1-a}$.
 代入して, $y = -e^{a-1}x + a$.

- (2) (1) より, $a > 1$ のとき $t = e^{1-a} < 1$ となるので, 図示すると下図のようになる.



ここで, 接線と x 軸との交点の x 座標は

$$0 = -e^{a-1}x + a \quad \therefore x = \frac{a}{e^{a-1}} = ae^{1-a}.$$

よって, 求める面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_{e^{1-a}}^1 (-\log x) dx - \int_{e^{1-a}}^{ae^{1-a}} (-e^{a-1}x + a) dx \\ &= [-x \log x + x]_{e^{1-a}}^1 - \left[-\frac{1}{2}e^{a-1}x^2 + ax \right]_{e^{1-a}}^{ae^{1-a}} \\ &= 1 - \frac{a^2 + 1}{2}e^{1-a} \end{aligned}$$