

[解答]

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
-2	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$-3+\sqrt{3}$	$-3+\sqrt{2}$

[解説]

(1)

問題の式を変形すると

$$2^x 2^{x^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow 2^{x+x^2} = 2^2$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2+x-2} = 2^0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -2, 1$$

となる。

(2)

問題の式を変形すると

$$(x-2)(x-1)(x+1)(x+2) = -2$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4) = -2$$

$$\Leftrightarrow (x^2)^2 - 5x^2 + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2, 3$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$$

となる。また、方程式 $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = -2$ において、 $X = x+3$ とおくと

$$(x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = -2$$

$$\Leftrightarrow (X-2)(X-1)(X+1)(X+2) = -2$$

となる。これは先ほどの方程式と一致しているから、 $X = \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$ である。よって、 $x = X-3$ より、

$$x = -3 \pm \sqrt{2}, -3 \pm \sqrt{3}$$

となる。一番大きいものは $x = -3 + \sqrt{3}$ 、二番目に大きいものは $-3 + \sqrt{2}$ である。

(1)

$x = \sin \theta - \cos \theta$ の両辺を二乗して変形すると

$$\begin{aligned} x^2 &= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \\ \Leftrightarrow \sin \theta \cos \theta &= \frac{1-x^2}{2} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} y &= (k - \sin \theta)(k + \cos \theta) \\ &= k^2 - k(\sin \theta - \cos \theta) - \sin \theta \cos \theta \\ &= k^2 - kx - \frac{1-x^2}{2} \\ &= \frac{x^2}{2} - kx + k^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{x^2}{2} - kx + k^2 - \frac{1}{2}$$

(2)

$$\begin{aligned} x &= \sin \theta - \cos \theta \\ &= \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \left(\because \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

と変形できる。また、 $0 \leq \theta \leq \pi$ より $-\frac{\pi}{4} \leq \theta - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi$ であるから、 $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$ である。よって

$$-1 \leq x \leq \sqrt{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad -1 \leq x \leq \sqrt{2}$$

(3)

(1)の結果を平方完成して

$$y = \frac{1}{2}(x-k)^2 + \frac{k^2}{2} - \frac{1}{2}$$

を得る。この式が描く放物線を C とおくと、 C は下に凸でありその軸は $x=k$ である。これと、(2)の結果より、定義域は $-1 \leq x \leq \sqrt{2}$ であるから次のように場合分けできる。

[1] $k < -1$ のとき

C は下に凸であり、 C の軸は定義域より左側にあるから、 y は $x=-1$ で最小値をとる。その値は

$$y = k^2 + k$$

である。

[2] $-1 \leq k < \sqrt{2}$ のとき

軸は定義域内にあるから、 y は $x=k$ で最小値をとる。その値は

$$y = \frac{k^2 - 1}{2}$$

である。

[3] $\sqrt{2} \leq k$ のとき

C の軸は定義域の右側にあるから、 y は $x=\sqrt{2}$ で最小値をとる。その値は

$$y = k^2 - \sqrt{2}k + \frac{1}{2}$$

である。

以上[1], [2], [3]より、 y の最小値は $k < -1$ のとき $y = k^2 + k$ 、 $-1 \leq k < \sqrt{2}$ のとき $y = \frac{k^2 - 1}{2}$ 、

$\sqrt{2} \leq k$ のとき $y = k^2 - \sqrt{2}k + \frac{1}{2}$ となる。

$$(\text{答}) \quad k < -1 \text{ のとき} \quad k^2 + k$$

$$-1 \leq k < \sqrt{2} \text{ のとき} \quad \frac{k^2 - 1}{2}$$

$$\sqrt{2} \leq k \text{ のとき} \quad k^2 - \sqrt{2}k + \frac{1}{2}$$

(1)

 s, t は

$$\begin{aligned}x^2 + ax + 1 &= -x^2 + bx + 3 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + (a-b)x - 2 &= 0 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

の解である。①の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned}D &= (a-b)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) \\ &= (a-b)^2 + 16\end{aligned}$$

より常に $D > 0$ が成立するため、 C_1, C_2 は必ず異なる 2 つの共有点 P, Q を持つ。また、 C_1 について $y' = 2x + a$ より点 P における接線の傾きは $2t + a$ であり、 C_2 について $y' = -2x + b$ より点 P における接線の傾きは $-2t + b$ である。これらが直交するから

$$(2t + a) \cdot (-2t + b) = -1$$

が成り立つ。変形すると

$$-2\{2t^2 + (a-b)t\} + ab = -1$$

となる。 t が①の解であることを利用してさらに変形すると

$$-2 \cdot 2 + ab = -1 \Leftrightarrow ab = 3$$

となる。

(答) $ab = 3$

(2)

(1)の結果より、 $a \neq 0$ が分かる。 C_1 と C_2 で囲まれた領域では C_2 が C_1 よりも上にあるから、求める面積を S とおくと

$$\begin{aligned}S &= \int_s^t \{(-x^2 + bx + 3) - (x^2 + ax + 1)\} dx \\ &= -\int_s^t \{2x^2 + (a-b)x - 2\} dx\end{aligned}$$

となる。また、 s, t が方程式①の解であることより $2x^2 + (a-b)x - 2 = 2(x-s)(x-t)$ と変形できるから

$$\begin{aligned}S &= -2 \int_s^t (x-s)(x-t) dx \\ &= -2 \cdot \left\{ -\frac{1}{6}(t-s)^3 \right\} \\ &= \frac{1}{3}(t-s)^3\end{aligned}$$

となる。また、方程式①において解と係数の関係より $t+s = \frac{b-a}{2}$, $st = -1$ である。よって、こ

のことに(1)の結果を用いて、

$$\begin{aligned}(t-s)^2 &= (t+s)^2 - 4st \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + 4 \\ &= \left(\frac{\frac{3}{a}-a}{2}\right)^2 + 4 \quad (\because a \neq 0) \\ &= \frac{1}{4}\left(a^2 + \frac{9}{a^2}\right) + \frac{5}{2}\end{aligned}$$

となる。以上より

$$S = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{4} \left(a^2 + \frac{9}{a^2} \right) + \frac{5}{2} \right\}^{\frac{3}{2}}$$

となる。また、 $a^2 + \frac{9}{a^2}$ が最小値をとるとき S も最小値をとる。 $a^2, \frac{9}{a^2} > 0$ より相加相乗平均の関係が利用できるため、

$$a^2 + \frac{9}{a^2} \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{9}{a^2}} = 6$$

である。等号は $a^2 = \frac{9}{a^2} \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{3}$ のとき成り立つ。このとき、 S は最小値をとり、その値は

$$S = \frac{1}{3} \cdot 6^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}$$

である。

(答) 面積 $\frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{4} \left(a^2 + \frac{9}{a^2} \right) + \frac{5}{2} \right\}^{\frac{3}{2}}$, 最小値 $\frac{8}{3}$