

1

【解答】

ア $\frac{1}{4}$ イ $\frac{20}{3}$

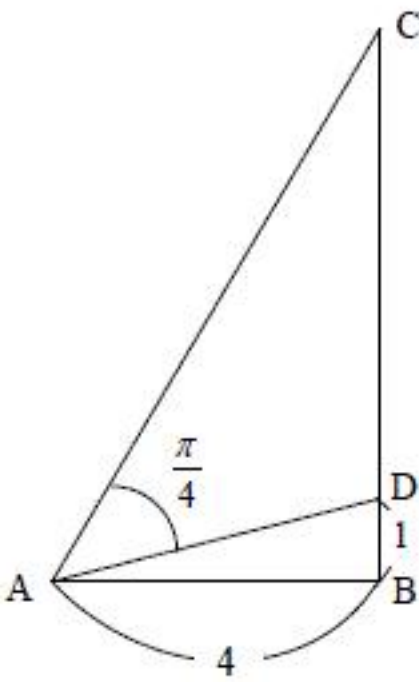
ウ $b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{2}$ エ $2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

オ $2n - 8 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)$

【解説】

(1)

題意で与えられた三角形 ABC を図示すると、以下のようになる。



上図より、

$$\begin{aligned} \tan \angle BAD &= \frac{BD}{AB} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

であるから、 $\tan$ の加法定理より、 $\tan \angle BAC$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \tan \angle BAC &= \tan \left(\angle BAD + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{\tan \angle BAD + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - (\tan \angle BAD) \cdot \left(\tan \frac{\pi}{4} \right)} \\ &= \frac{\frac{1}{4} + 1}{1 - \frac{1}{4} \cdot 1} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

となる。したがって、辺 BC の長さは、

$$\begin{aligned} BC &= AB \cdot \tan \angle BAC \\ &= 4 \cdot \frac{5}{3} \\ &= \frac{20}{3} \end{aligned}$$

である。

(2)

まず、 b_{n+1} を b_n で表すことを考える。すべての自然数 n について、 $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{n}{2}$ が成立するか
ら、

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+2} - a_{n+1} \\ &= \left(\frac{3}{4}a_{n+1} + \frac{n+1}{2} \right) - \left(\frac{3}{4}a_n + \frac{n}{2} \right) \\ &= \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と表せる。ここで b_1 を求めると、

$$\begin{aligned} b_1 &= a_2 - a_1 \\ &= \frac{3}{4}a_1 + \frac{1}{2} - a_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

であることがわかるから、これを用いて数列 $\{b_n\}$ の漸化式を解くと、

$$\begin{aligned} b_{n+1} - 2 &= \frac{3}{4}(b_n - 2) \\ \Leftrightarrow b_n - 2 &= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot (b_1 - 2) \\ \Leftrightarrow b_n &= 2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

となることがわかる。したがって、 $n \geq 2$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \right) \\ &= 2 + 2(n-1) - 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{1 - \frac{3}{4}} \\ &= 2n - 8 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \right) \end{aligned}$$

と求まる。これは $n=1$ のときも成立する。

(1)

n が 2 以上の自然数のとき、和 S_1 は、

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^n (x+k-1) \\ &= nx + \frac{1}{2}(n-1)n \end{aligned}$$

と計算され、和 S_2 は、

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=1}^n (x+k-1)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \{x^2 + 2x(k-1) + (k-1)^2\} \\ &= nx^2 + (n-1)nx + \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \end{aligned}$$

と計算される。

$$(\text{答}) \quad S_1 = nx + \frac{1}{2}(n-1)n, \quad S_2 = nx^2 + (n-1)nx + \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

(2)

$S_2 = (S_1)^2$ が成り立つとき、(1)より、 x を n で表すと、

$$\begin{aligned} S_2 &= (S_1)^2 \\ \Leftrightarrow nx^2 + (n-1)nx + \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) &= \left\{ nx + \frac{1}{2}(n-1)n \right\}^2 \\ \Leftrightarrow n(n-1)x^2 + n(n-1)^2 x + \frac{1}{12}n(n-1)(3n^2 - 7n + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + (n-1)x + \frac{1}{12}(3n^2 - 7n + 2) &= 0 \quad (\because n(n-1) > 0) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-3n+3 \pm \sqrt{3n+3}}{6} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{-3n+3 \pm \sqrt{3n+3}}{6}$$

(3)

$S_2 = (S_1)^2$ かつ $n=26$ が成立するとき、(2)の結果より、

$$\begin{aligned} x &= \frac{-78+3 \pm \sqrt{78+3}}{6} \\ &= \frac{-75 \pm 9}{6} \\ &= -14, -11 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad x = -14, -11$$

3

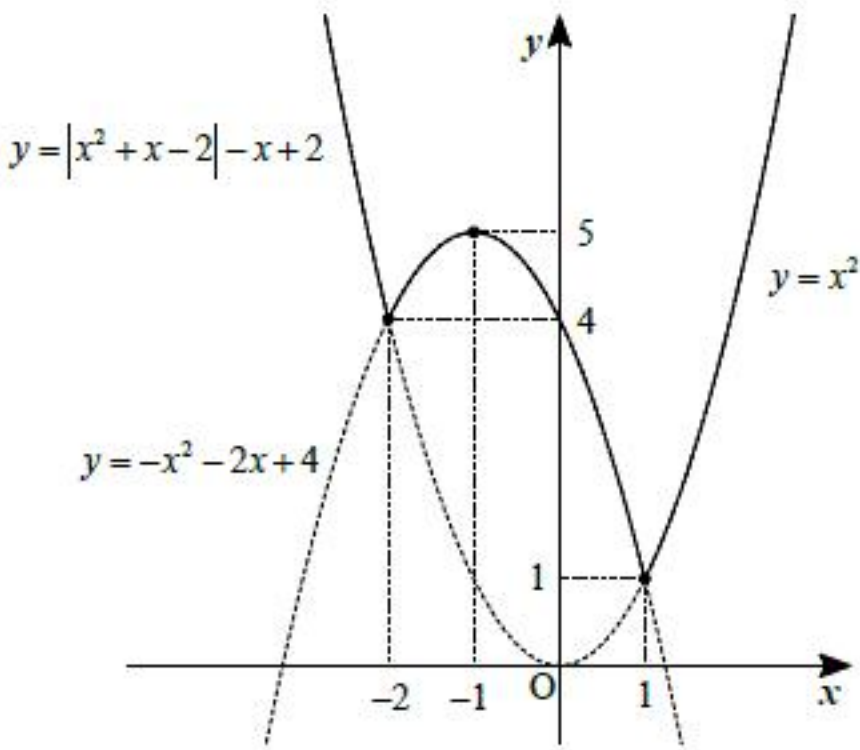
(1)

与えられた曲線 C の式 $y=|x^2+x-2|-x+2$ の絶対値の中身は、 $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$ と因数分解できるから、 C の式は、

$$x<-2, \ 1<x \text{ のとき, } y=x^2$$

$$-2\leq x\leq 1 \text{ のとき, } y=-x^2-2x+4$$

となる。よって、曲線 C の概形は以下の実線部となる。



(答) 前図

(2)

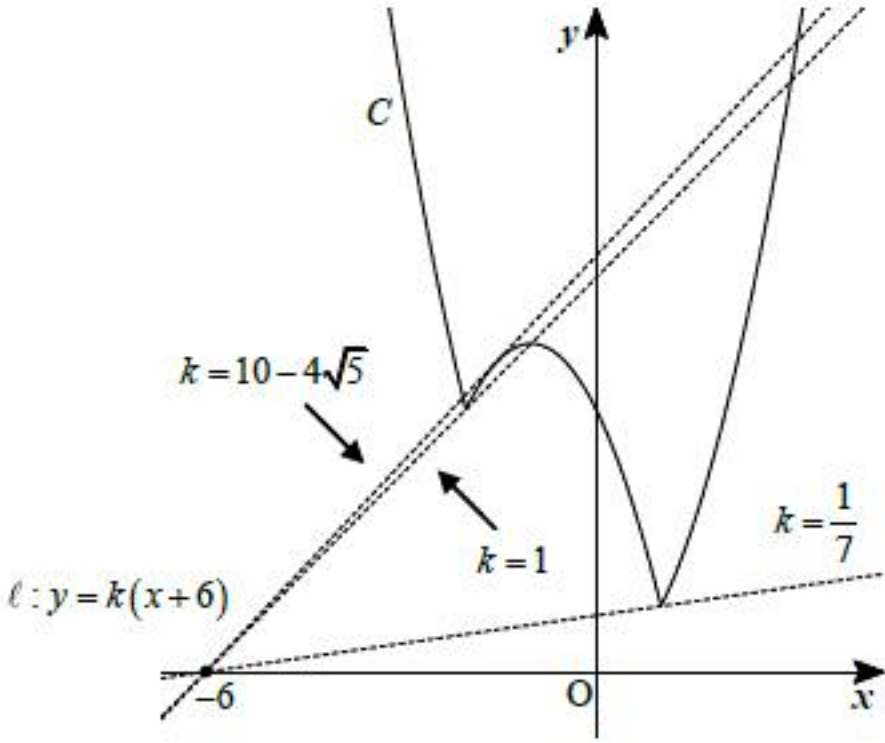
直線 ℓ が、曲線 C 上の点 $(1, 1)$, $(-2, 4)$ を通るとき、 k の値はそれぞれ、

$$1=k(1+6) \Leftrightarrow k=\frac{1}{7}$$

$$4=k(-2+6) \Leftrightarrow k=1$$

となる。また、曲線 C の $-2\leq x\leq 1$ の部分の放物線と直線 ℓ が接するときの k の値は、
 $y=-x^2-2x+4$, $y=k(x+6)$ を連立してできた x の 2 次方程式が重解をもつ
 $\Leftrightarrow$ 2 次方程式 $x^2+(k+2)x+(6k-4)=0$ の判別式 D が 0 となる
 $\Leftrightarrow (k+2)^2-4(6k-4)=0$
 $\Leftrightarrow k=10\pm 4\sqrt{5}$
 $\Leftrightarrow k=10-4\sqrt{5} \ (\because -2\leq x\leq 1)$

より、 $k=10-4\sqrt{5}$ であることがわかる。ここで $\sqrt{5}<\frac{9}{4}$ より $1<10-4\sqrt{5}$ であり、さらに直線 ℓ は定点 $(-6, 0)$ を通り、傾き k の直線であることに注意して曲線 C と直線 ℓ を xy 平面上に図示すると、以下の図のようになる。



上図より、曲線 C と直線 ℓ の共有点の個数は以下の表のようになる。

k の範囲	共有点の個数
$k<1, 10-4\sqrt{5}<k$	2 個以下
$k=1, 10-4\sqrt{5}$	3 個
$1<k<10-4\sqrt{5}$	4 個

したがって、曲線 C と直線 ℓ の共有点がちょうど 3 個になるような k の値は、

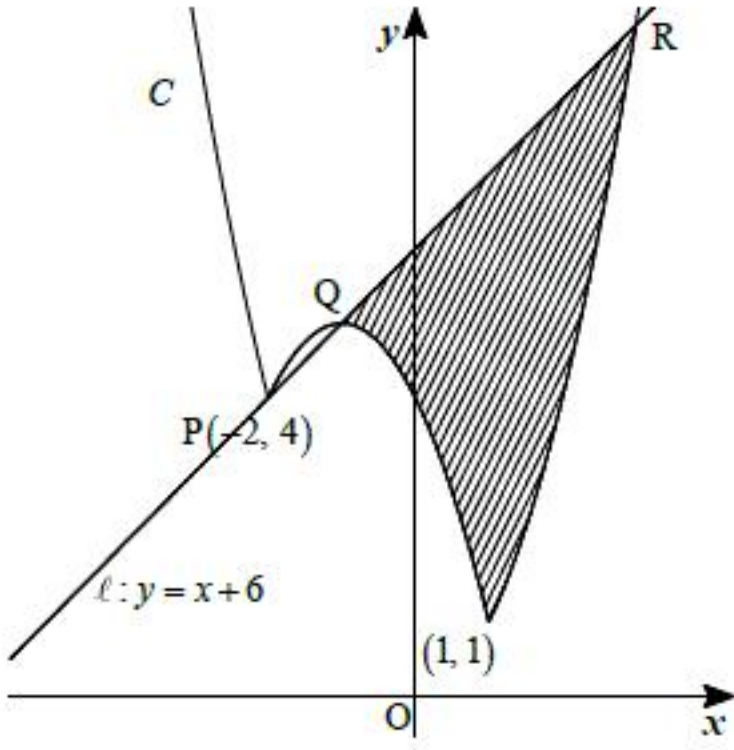
$$k=1, 10-4\sqrt{5}$$

であることがわかる。

(答) $k=1, 10-4\sqrt{5}$

(3)

(2)で求めた中で最小のものは $k=1$ である。このとき、曲線 C と直線 ℓ のグラフは以下の図のようになる。求める面積は、下図の斜線部の面積である。



まず、点 Q , R の x 座標を求める。点 Q は直線 ℓ と放物線 $y=-x^2-2x+4$ ($-2\leq x\leq 1$) の交点のうち、点 P と異なるものであるから、

$$-x^2-2x+4=x+6$$

$$\Leftrightarrow x=-2, -1$$

より、その座標は $(-1, 5)$ であることがわかる。また、点 R は直線 ℓ と放物線 $y=x^2$ ($1<x$) の交点であるから、

$$x^2=x+6$$

$$\Leftrightarrow x=-2, 3$$

より、その座標は $(3, 9)$ であることがわかる。また、曲線 C は、各範囲で

$$C:\begin{cases} y=-x^2-2x+4 \ (-2\leq x\leq 1) \\ y=x^2 \ (1\leq x\leq 3) \end{cases}$$

と表されるから、求める面積 S は、

$$S=\int_{-1}^1(x+6-(-x^2-2x+4))dx+\int_1^3(x+6-x^2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_1^3$$

$$=\frac{14}{3}+\frac{22}{3}$$

$$=12$$

となる。

(答) 12