

〔解答〕

ア: 3 イ: 1 ウ: 6 エ: 3

オ: 8 カ: 3 キ: 3 ク: 8

〔解説〕

(1)

Aが3勝1敗で勝利するということは、3試合が終わった段階でAが2勝、Bが1勝しており、かつ4試合目にAが勝つということである。3試合が終わった段階でAが2勝、Bが1勝しているときの確率は、Aが勝つ試合の選び方が ${}_3C_2$ 通りあるため、

$${}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

である。4試合目にはAが勝てばよいので、求める確率は、

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

である。

(2)

優勝が決まるまでに試合が5回行われるということは、4試合目が終わった段階でA、Bがともに2勝しているということである。Aが勝つ試合の選び方は ${}_4C_2$ 通りあるため、求める確率は、

$${}_4C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

である。

(3)

試合数が2試合以下ではどちらの勝ち数も2勝以下であるから、優勝は決まらない。また、5試合目が終わった段階でどちらか一方は少なくとも3勝しているため、5試合以下で優勝が決まる。したがって、優勝が決まるまでの試合数は3, 4, 5試合のいずれかであるから、まず各場合の確率を考えることにする。

[1] 3試合で優勝が決まるとき

AまたはBが3試合連続で勝利すればよいので、この場合の確率は、

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

である。

[2] 4試合で優勝が決まるとき

AまたはBが3勝1敗で勝利するときであるから、(1)よりAが3勝1敗で勝利する確率は

$\frac{3}{16}$ であり、同様にBが3勝1敗で勝利する確率も $\frac{3}{16}$ である。従って、この場合の確率は、

$$\frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{3}{8}$$

である。

[3] 5試合で優勝が決まるとき

(2)より、この確率は、

$$\frac{3}{8}$$

である。

以上[1], [2], [3]より、求める期待値は、

$$3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 5 \cdot \frac{3}{8} = \frac{33}{8}$$

であることがわかる。

2

〔解答〕

ケ: 2 コ: 7 サ: 6 シ: 1

ス: 1 セ: 6 ソ: 3 タ: 3

〔解説〕

(1)

与えられた関数

$$f(x) = \sin x + \cos 2x$$

について、

$$\int_0^{2\pi} xf(x) dx = \int_0^{2\pi} (x \sin x + x \cos 2x) dx$$

である。ここで、部分積分法より、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} x \sin x dx &= \left[x(-\cos x) \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-\cos x) dx \\ &= -2\pi - [-\sin x]_0^{2\pi} \\ &= -2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} x \cos 2x dx &= \left[x \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2x}{2} dx \\ &= 0 - \left[-\frac{\cos 2x}{4} \right]_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

であることから、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} xf(x) dx &= \int_0^{2\pi} (x \sin x + x \cos 2x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} x \sin x dx + \int_0^{2\pi} x \cos 2x dx \\ &= -2\pi \end{aligned}$$

が得られる。

(2)

三角関数の倍角公式を利用して、与えられた関数を変形すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x + (1 - 2\sin^2 x) \\ &= -2\sin^2 x + \sin x + 1 \\ &= -(\sin x - 1)(2\sin x + 1) \end{aligned}$$

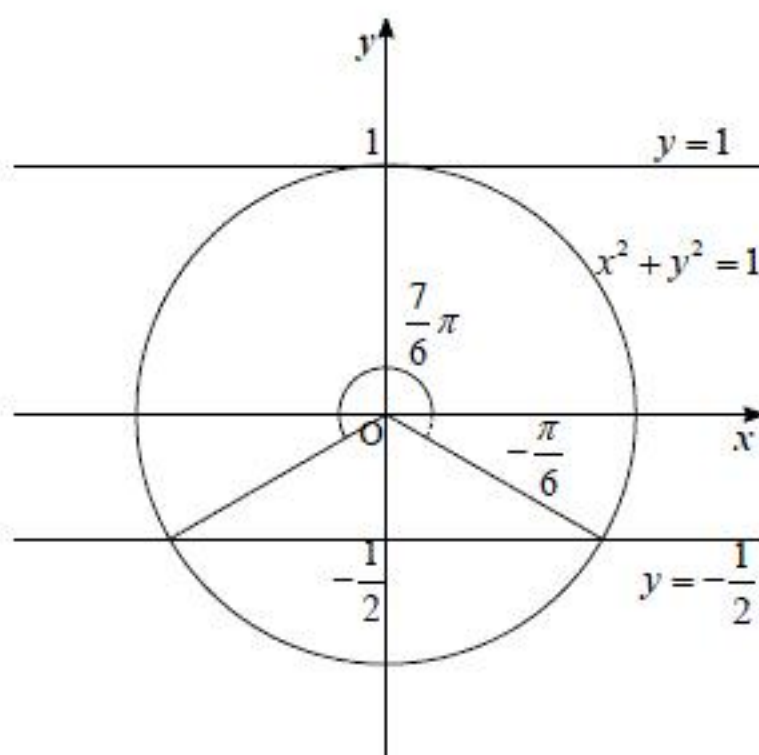
となるから、

$$f(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -(\sin x - 1)(2\sin x + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$$

である。以下この不等式を、 xy 平面上の単位円で考えることにする。



上図より、 $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で、 $-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$ を満たす x の範囲は、

$$0 \leq x \leq \frac{7}{6}\pi, \quad \frac{11}{6}\pi \leq x \leq 2\pi$$

であることがわかる。

(3)

(2)の考察より、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx &= \int_0^{\frac{7}{6}\pi} f(x) dx + \int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} \{-f(x)\} dx + \int_{\frac{11}{6}\pi}^{2\pi} f(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{7}{6}\pi} f(x) dx + \left\{ \int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} f(x) dx - 2 \int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} f(x) dx \right\} + \int_{\frac{11}{6}\pi}^{2\pi} f(x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(x) dx - 2 \int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} f(x) dx \end{aligned}$$

であることがわかる。ここで、 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とおくと、積分定数 C を用いて、

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx \\ &= \int (\sin x + \cos 2x) dx \\ &= -\cos x + \frac{1}{2} \sin 2x + C \end{aligned}$$

と表せる。従って、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx &= \int_0^{2\pi} f(x) dx - 2 \int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} f(x) dx \\ &= \{F(2\pi) - F(0)\} - 2 \left\{ F\left(\frac{11}{6}\pi\right) - F\left(\frac{7}{6}\pi\right) \right\} \\ &= \left(-\cos 2\pi + \frac{1}{2} \sin 4\pi \right) - \left(-\cos 0 + \frac{1}{2} \sin 0 \right) \\ &\quad - 2 \left(-\cos \frac{11}{6}\pi + \frac{1}{2} \sin \frac{11}{3}\pi \right) + 2 \left(-\cos \frac{7}{6}\pi + \frac{1}{2} \sin \frac{7}{3}\pi \right) \\ &= \left(-1 + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) - \left(-1 + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) - 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

と計算できる。

(1)

与式を計算することで、

$$\begin{aligned}
 z + wi &= \left\{ (1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i \right\} (x + yi) \\
 &= \left\{ (1 - \sqrt{3})x - (1 + \sqrt{3})y \right\} + \left\{ (1 + \sqrt{3})x + (1 - \sqrt{3})y \right\} i \\
 u + vi &= \frac{x + yi}{1 + \sqrt{3}i} \\
 &= \frac{(x + yi)(1 - \sqrt{3}i)}{(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)} \\
 &= \frac{x + \sqrt{3}y}{4} + \frac{-\sqrt{3}x + y}{4}i
 \end{aligned}$$

を得る。従って、

$$\begin{cases}
 z = (1 - \sqrt{3})x - (1 + \sqrt{3})y \\
 w = (1 + \sqrt{3})x + (1 - \sqrt{3})y \\
 u = \frac{x + \sqrt{3}y}{4} \\
 v = \frac{-\sqrt{3}x + y}{4}
 \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \quad z = (1 - \sqrt{3})x - (1 + \sqrt{3})y, \quad w = (1 + \sqrt{3})x + (1 - \sqrt{3})y, \quad u = \frac{x + \sqrt{3}y}{4}, \quad v = \frac{-\sqrt{3}x + y}{4}$$

(2)

2 次正方行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} ex + fy \\ gx + hy \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

となる。この等式は任意の実数 x, y について成立せねばならないので、(1)の結果と係数を比較することで、

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3} & -(1 + \sqrt{3}) \\ 1 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad A = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3} & -1 - \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

(2)の結果より、積 AB は

$$\begin{aligned}
 AB &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3} & -(1 + \sqrt{3}) \\ 1 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4)

(3)の結果より、 AB のべき乗を順に計算していくと、

$$\begin{aligned}
 (AB)^2 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\
 (AB)^3 &= (AB)^2 (AB) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \\
 (AB)^4 &= (AB)^3 (AB) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $(AB)^n$ が単位行列の定数倍となる最小の正の整数 n は、

$$n = 4$$

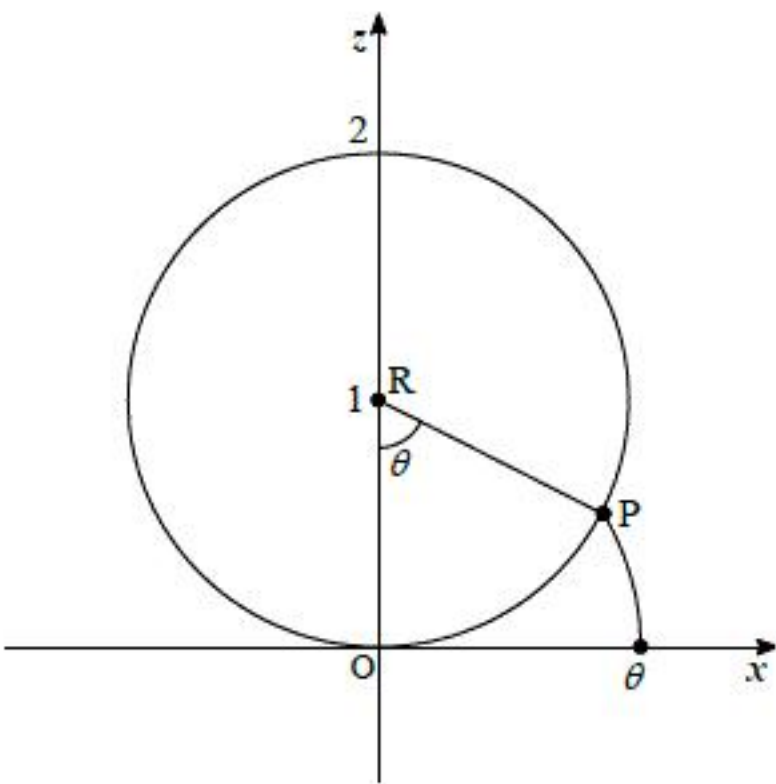
であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad n = 4$$

4

(1)

点Rを $R(0, \sin 2\theta, 1)$ とおく。紙は y 軸方向には動かないため、紙を曲げて円筒を作ってもPの y 座標の大きさは変わらず $\sin 2\theta$ である。また、紙の x 軸方向の長さは 2π であるため、円筒の半径は1である。円筒を $y = \sin 2\theta$ を満たす点全体がなす平面で切断したときの切断面は下図のようになる。



図より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RP} \\ &= (0, \sin 2\theta, 1) + (\sin \theta, 0, -\cos \theta) \\ &= (\sin \theta, \sin 2\theta, 1 - \cos \theta)\end{aligned}$$

であるため、Pの座標は、

$$(\sin \theta, \sin 2\theta, 1 - \cos \theta)$$

である。

(答) $(\sin \theta, \sin 2\theta, 1 - \cos \theta)$

(2)

点E, P, Qは一直線上に存在するため、ある定数 k が存在し、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EQ} &= k\overrightarrow{EP} \\ &= k(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OE})\end{aligned}$$

と表すことができる。これより、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EQ} &= k(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OE}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OE} &= k(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OE}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OQ} &= k\overrightarrow{OP} + (1 - k)\overrightarrow{OE} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OQ} &= k(\sin \theta, \sin 2\theta, 1 - \cos \theta) + (1 - k)(0, 0, 1) \\ \therefore \overrightarrow{OQ} &= (k \sin \theta, k \sin 2\theta, 1 - k \cos \theta)\end{aligned}$$

である。ここで、

$$\overrightarrow{OQ} = (s, t, 0)$$

であることから、 z 座標を比較することにより、

$$\begin{aligned}1 - k \cos \theta &= 0 \\ \therefore k &= \frac{1}{\cos \theta} \quad (\because \cos \theta \neq 0)\end{aligned}$$

が得られる。よって、 x, y 座標を比較することにより、

$$\begin{cases} s = k \sin \theta = \tan \theta \\ t = k \sin 2\theta = 2 \sin \theta \end{cases}$$

となる。

(答) $s = \tan \theta, t = 2 \sin \theta$

(3)

(2)より、点Qの座標は $Q(\tan \theta, 2 \sin \theta, 0)$ であることがわかったから、媒介変数表示された曲線

$$\begin{cases} x = \tan \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

を図示すればよいことになる。 x, y を θ について微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= \frac{1}{\cos^2 \theta} > 0 \\ \frac{dy}{d\theta} &= 2 \cos \theta > 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = 2 \cos^3 \theta > 0\end{aligned}$$

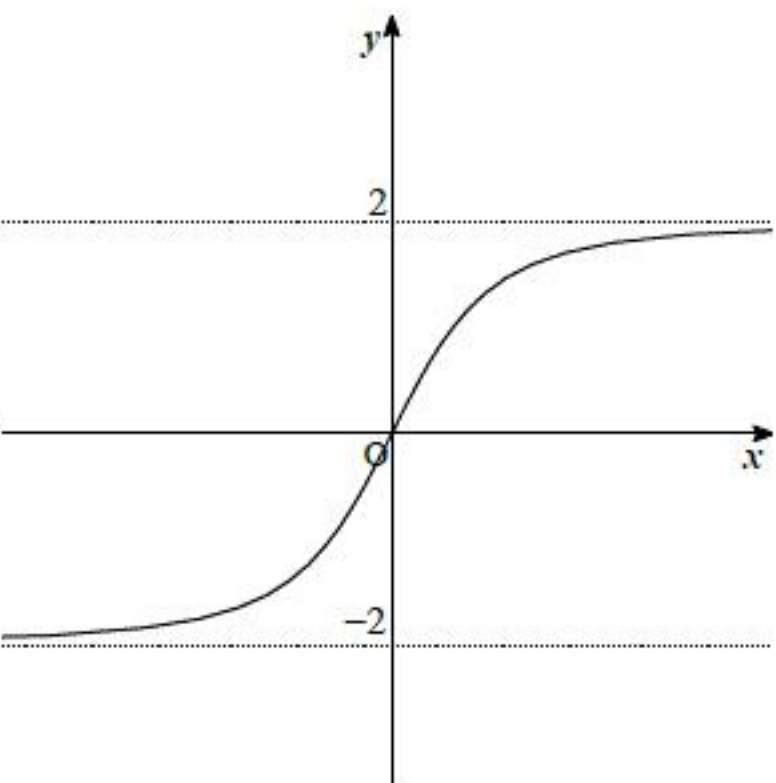
となり、また、各極限を調べると、

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} \tan \theta &= -\infty, \quad \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \tan \theta = +\infty \\ \lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} 2 \sin \theta &= -2, \quad \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} 2 \sin \theta = 2 \\ \lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} 2 \cos^3 \theta &= 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} 2 \cos^3 \theta = 0\end{aligned}$$

となるから、この曲線の進行表は、以下ようになる。

θ	$\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	...	0	...	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$\frac{dx}{d\theta}$		+	1	+	
$\frac{dy}{d\theta}$		+	2	+	
$\frac{dy}{dx}$	(0)	+	2	+	(0)
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\left(\begin{pmatrix} -\infty \\ -2 \end{pmatrix}\right)$	$\nearrow$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\nearrow$	$\left(\begin{pmatrix} \infty \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

従って、求めるQの軌跡は下図のようになる。特に、直線 $y = -2, y = 2$ は漸近線となることに注意する。

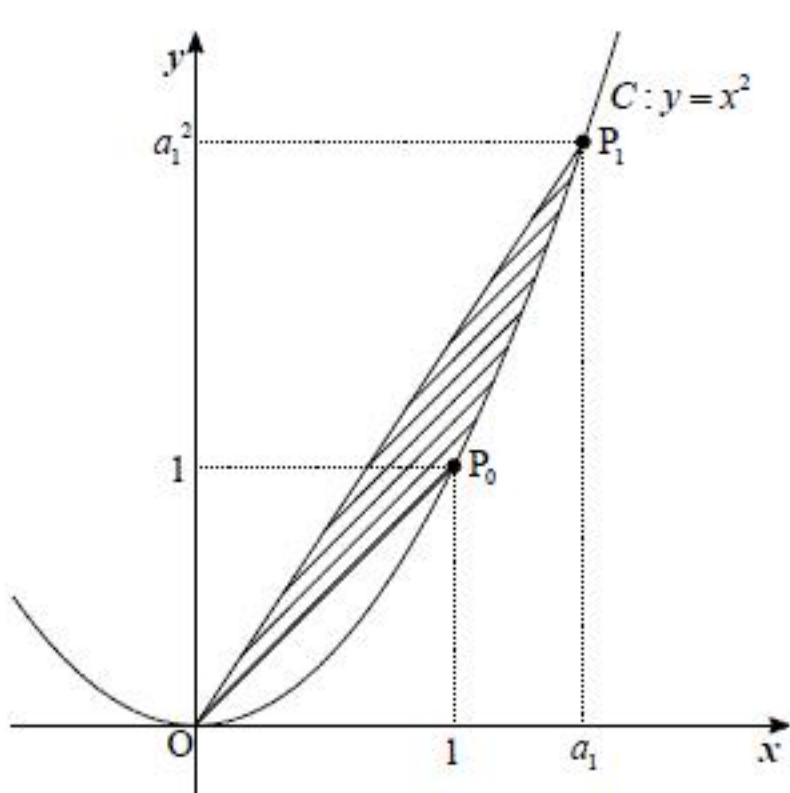


(答) 前図

5

(1)

題意より、曲線 C と 2 つの線分 OP_0 , OP_1 は下図のような位置関係にあり、 S_1 は下図の斜線部の面積である。



線分 OP_0 , OP_1 の傾きはそれぞれ 1 , a_1 であるため、これらの線分を含む直線の式はそれぞれ、

$$y = x$$

$$y = a_1 x$$

である。従って、求める面積は、

$$S_1 = \int_0^1 (a_1 x - x) dx + \int_1^{a_1} (a_1 x - x^2) dx$$

$$= (a_1 - 1) \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{a_1 x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_1^{a_1}$$

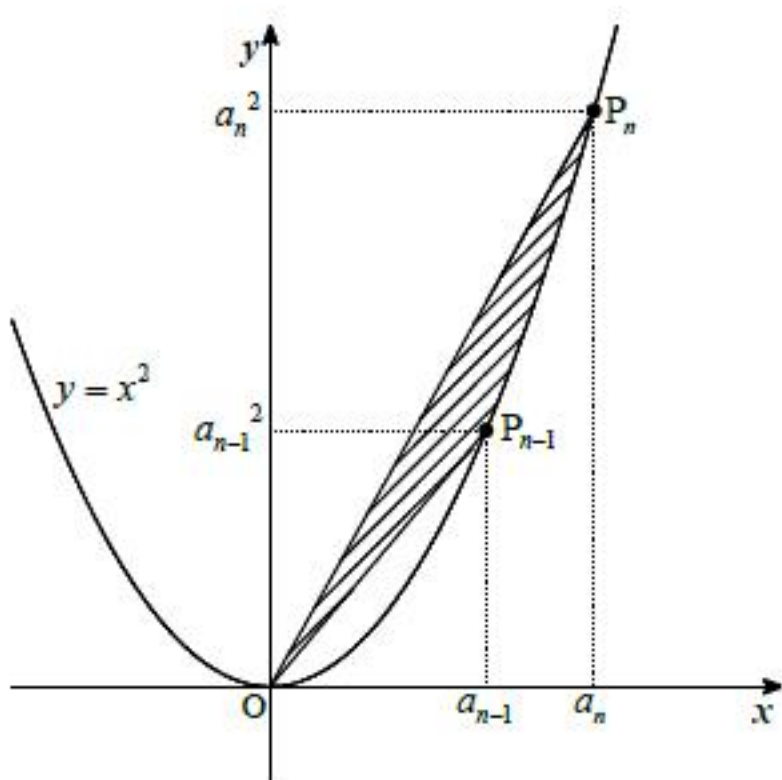
$$= \frac{a_1^3 - 1}{6}$$

である。

$$(\text{答}) S_1 = \frac{a_1^3 - 1}{6}$$

(2)

$n \geq 2$ のとき、題意より、曲線 C と 2 つの線分 OP_{n-1} , OP_n は次ページの図のような位置関係にあり、 S_n は図の斜線部の面積である。



線分 OP_{n-1} , OP_n の傾きはそれぞれ a_{n-1} , a_n であるため、求める面積は、

$$S_n = \int_0^{a_{n-1}} (a_n x - a_{n-1} x) dx + \int_{a_{n-1}}^{a_n} (a_n x - x^2) dx$$

$$= (a_n - a_{n-1}) \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{a_{n-1}} + \left[\frac{a_n x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{a_{n-1}}^{a_n}$$

$$= \frac{a_n^3 - a_{n-1}^3}{6}$$

である。

$$(\text{答}) S_n = \frac{a_n^3 - a_{n-1}^3}{6}$$

(3)

(1), (2) より、

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_n = \frac{a_1^3 - 1^3}{6} + \frac{a_2^3 - a_1^3}{6} + \cdots + \frac{a_n^3 - a_{n-1}^3}{6}$$

$$= \frac{a_n^3 - 1}{6}$$

である。

$$(\text{答}) S_1 + S_2 + \cdots + S_n = \frac{a_n^3 - 1}{6}$$

(4)

$n \geq 1$ に対し、数列 $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ が初項 1 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列となるとき、

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}$$

が成り立つ。これと(3)の結果より、

$$\frac{a_n^3 - 1}{6} = 2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}$$

$$\therefore a_n = \sqrt[3]{12 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} + 1}$$

であるため、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{12 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} + 1}$$

$$= \sqrt[3]{13}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt[3]{13}$$