

〔解答〕

	ア	イ	ウ	エ
(1)	$\frac{12}{13}$	126	$\frac{65}{6}$	$\frac{14}{3}$
	オ			
(2)	$\frac{5}{16}$			

〔解説〕

(1)

余弦定理より、

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} \\ &= \frac{13^2 + 21^2 - 20^2}{2 \cdot 13 \cdot 21} \\ &= \frac{5}{13}\end{aligned}$$

であり、 $0 < B < \pi$ より $0 < \sin B < 1$ であるから、

$$\begin{aligned}\sin B &= \sqrt{1 - \cos^2 B} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} \\ &= \frac{12}{13}\end{aligned}$$

となる。これより、 $\triangle ABC$ の面積を S として、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B \\ &= \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 21 \cdot \frac{12}{13} \\ &= 126\end{aligned}$$

が成り立つ。また、正弦定理より、外接円の半径を R として、

$$\begin{aligned}\frac{AC}{\sin B} &= 2R \\ \Leftrightarrow R &= \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \frac{13}{12} \\ \Leftrightarrow R &= \frac{65}{6}\end{aligned}$$

となる。さらに、内接円の半径を r とすると、 S について、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot r \cdot (13 + 21 + 20) \\ \Leftrightarrow r &= \frac{2S}{13 + 21 + 20} \\ \therefore r &= \frac{14}{3}\end{aligned}$$

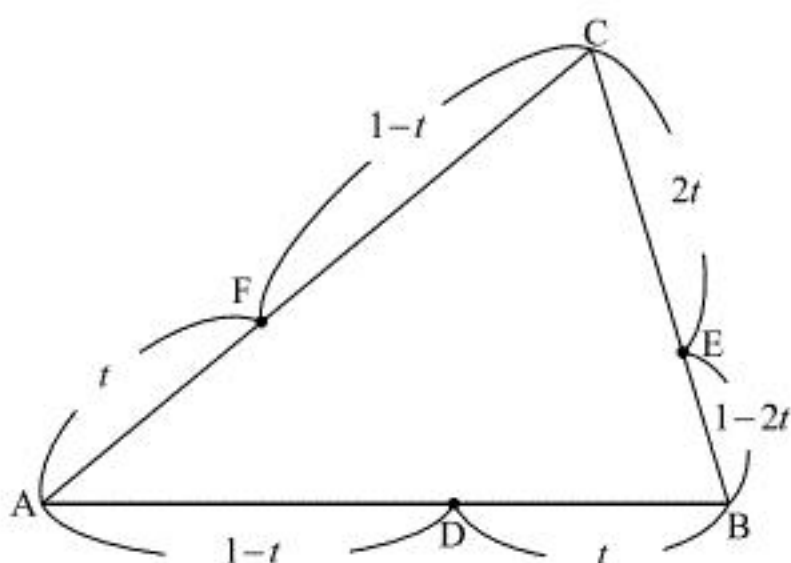
が得られる。

(2)

起こりうるすべての場合の数は、コイン1枚につき表と裏の2通りあるから 2^6 通りでありこれらは同様に確からしい。このうち、3つが表、3つが裏となる場合の数は6つのコインのうち表となる3枚を選ぶ場合の数に等しく、 ${}_6C_3$ 通りある。したがって求める確率は

$$\frac{{}_6C_3}{2^6} = \frac{5}{16}$$

である。



(1)

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} \\
 &= 2t\vec{a} + (1-2t)\vec{b} - (1-t)\vec{a} \\
 &= (3t-1)\vec{a} + (1-2t)\vec{b}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{DE} = (3t-1)\vec{a} + (1-2t)\vec{b}$$

(2)

$\triangle ADF$ の面積を S とすると、

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \sin \angle BAC \cdot AD \cdot AF \\
 &= \frac{1}{2} \sin \angle BAC \cdot (1-t)AB \cdot tAC \\
 &= t(1-t) \cdot \frac{1}{2} \sin \angle BAC \cdot AB \cdot AC
 \end{aligned}$$

であり、

$$\frac{1}{2} \sin \angle BAC \cdot AB \cdot AC = 1$$

であるから、

$$S = t(1-t)$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad t(1-t)$$

(3)

(2)と同様にして、

$$\triangle BDE = t(1-2t)$$

$$\triangle CEF = 2t(1-t)$$

であるから、 $\triangle DEF$ の面積を T とおくと、

$$\begin{aligned}
 T &= 1 - \{t(1-t) + t(1-2t) + 2t(1-t)\} \\
 &= 5t^2 - 4t + 1 \\
 &= 5\left(t - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $0 < t < \frac{1}{2}$ において、 T は $t = \frac{2}{5}$ で最小値 $\frac{1}{5}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{5}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 f(t) &= -\frac{1}{2}(\log_2 t)^3 + 21(\log_4 t)^2 - 9\log_4 t^2 + 1 \\
 &= -\frac{1}{2}(\log_2 t)^3 + 21\left(\frac{\log_2 t}{\log_2 4}\right)^2 - 9 \cdot 2 \cdot \left(\frac{\log_2 t}{\log_2 4}\right) + 1 \\
 &= -\frac{1}{2}x^3 + \frac{21}{4}x^2 - 9x + 1
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(t) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{21}{4}x^2 - 9x + 1$$

(2)

$$1 \leq t \leq 256 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 8$$

であり、 $g(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{21}{4}x^2 - 9x + 1$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= -\frac{3}{2}x^2 + \frac{21}{2}x - 9 \\
 &= -\frac{3}{2}(x^2 - 7x + 6) \\
 &= -\frac{3}{2}(x-1)(x-6)
 \end{aligned}$$

となるから、 $g(x)$ の $0 \leq x \leq 8$ における増減表は次のようになる。

x	0	...	1	...	6	...	8
$g'(x)$	-	-	0	+	0	-	-
$g(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{13}{4}$	$\nearrow$	28	$\searrow$	9

以上より、 $g(x)$ は、 $x=1$ で最小値 $-\frac{13}{4}$ 、 $x=6$ で最大値 28 をとる。 $x=1$ のとき $t=2$ 、 $x=6$ の

とき $t=64$ であるから、 $f(t)$ は、 $t=2$ で最小値 $-\frac{13}{4}$ 、 $t=64$ で最大値 28 をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値 } 28, \text{ 最小値 } -\frac{13}{4}$$