

数 学

注 意

1. 問題は全部で5題あり，冊子は計算用の余白もあわせて12ページである。
2. 解答用紙に氏名・受験番号を忘れずに記入すること。（ただし，マーク・シートにはあらかじめ受験番号がプリントされている。）
3. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に記入すること。指定の欄以外に記入されたものは採点の対象としない。
4. マーク・シート記入については，解答用紙（その1）の「解答上の注意」にしたがうこと。
5. 問題3，4，5の解答については，論述なしで結果だけ記しても，正解とはみなさない。
6. 解答用紙はすべて必ず提出すること。問題冊子は持ち帰ってよい。

〔計算用余白〕

〔計 算 用 余 白〕

1 解答を解答用紙(その1)の 1 欄に記入せよ.

A, B の2人が何回か試合を行い, どちらか先に3勝した方を優勝とする.
A が勝つ確率も B が勝つ確率も $\frac{1}{2}$ とし, 引き分けはないものとするとき, 次の問に答えよ. ただし, 解答の分数は既約分数とする.

(1) A が3勝1敗で優勝する確率は $\frac{\text{ア}}{\text{イ ウ}}$ である.

(2) 優勝が決まるまでに試合が5回行われる確率は $\frac{\text{エ}}{\text{オ}}$ である.

(3) 優勝が決まるまでの試合の回数の期待値は $\frac{\text{カ キ}}{\text{ク}}$ である.

(計算用余白)

2 解答を解答用紙(その1)の **2** 欄に記入せよ.

関数

$$f(x) = \sin x + \cos 2x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

について、次の問に答えよ。ただし、解答の分数は既約分数とし、根号の中に現れる自然数は最小となるようにする。

$$(1) \int_0^{2\pi} x f(x) dx = - \boxed{\text{ケ}} \pi$$

$$(2) f(x) \geq 0 \text{ となる } x \text{ の範囲は } 0 \leq x \leq \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \pi, \frac{\boxed{\text{シ}} \boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \pi \leq x \leq 2\pi \text{ である。}$$

$$(3) \int_0^{2\pi} |f(x)| dx = \boxed{\text{ソ}} \sqrt{\boxed{\text{タ}}}$$

[計 算 用 余 白]

3 解答を解答用紙(その2)の **3** 欄に記入せよ.

複素数 $x + yi$ に対して,

$$z + wi = \{(1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i\} (x + yi),$$

$$u + vi = \frac{x + yi}{1 + \sqrt{3}i}$$

とする. ただし, i は虚数単位, x, y, z, w, u, v は実数である.

(1) z, w, u, v を x, y を用いて表せ.

(2) (1)の結果は2次正方行列 A, B を用いて

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表すことができる. このとき, 行列 A, B を求めよ.

(3) 積 AB を求めよ.

(4) $(AB)^n$ が単位行列の定数倍となるような最小の正の整数 n を求めよ.

〔計算用余白〕

4 解答を解答用紙(その3)の **4** 欄に記入せよ.

xyz 空間内の xy 平面上に, 4点 $A(\pi, 1, 0)$, $B(-\pi, 1, 0)$, $C(-\pi, -1, 0)$, $D(\pi, -1, 0)$ を頂点とする長方形の紙がおいてある. この紙の $x=0$, $-1 \leq y \leq 1$, $z=0$ の部分を動かさないように, 紙を z 座標が正の方向へ曲げていき, 辺 AD と辺 BC を貼り合わせて円筒を作る.

このとき, 最初 $(\theta, \sin 2\theta, 0)$ の位置にあった紙面上の点に対応する円筒上の点を P とする. ただし, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ である. さらに, 点 P と $E(0, 0, 1)$, $Q(s, t, 0)$ が一直線上にあるように点 Q をとる. 次の問に答えよ.

(1) 点 P の座標を θ を用いて表せ.

(2) s, t を θ を用いて表せ.

(3) θ が $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くときの点 Q の軌跡を, xy 平面上に図示せよ.

〔計 算 用 余 白〕

5 解答を解答用紙(その4)の **5** 欄に記入せよ.

原点が O の xy 平面において, 曲線 $C: y = x^2$ 上に点 $P_0(1, 1)$, $P_1(a_1, a_1^2)$, $\dots$, $P_n(a_n, a_n^2)$, $\dots$ をとる. ただし, $1 < a_1 < \dots < a_n < \dots$ とする. 曲線 C と 2 つの線分 OP_n , OP_{n-1} で囲まれる図形の面積を S_n とするとき, 次の問に答えよ.

- (1) S_1 を a_1 を用いて表せ.
- (2) $n \geq 2$ のとき, S_n を a_n と a_{n-1} を用いて表せ.
- (3) $S_1 + S_2 + \dots + S_n$ を a_n を用いて表せ.
- (4) 数列 $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ が, 初項 1 , 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列となるとき, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

[計 算 用 余 白]