

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
3	6	7	5	6	6	1	5

〔解説〕

(1)

赤玉7個と2つの縦棒を1列に並べることを考える。2つの棒によって仕切られた1番左側の赤玉を箱Aに、2つの棒の間の赤玉を箱Bに、1番右側の赤玉を箱Cに入れることに対応させれば、赤玉7個の箱A, B, Cへの入れ方の総数は、赤玉7個と2つの縦棒の並べ方の総数に一致する。よって入れ方の総数は、

$${}_{7+2}C_2 = 36 \text{ (通り)}$$

である。

(2)

まず赤玉7個と白玉5個をそれぞれ分けて3つの箱A, B, Cに入れると考える。(1)と同様に考えると、白玉5個の箱A, B, Cへの入れ方の総数は、

$${}_{5+2}C_2 = 21 \text{ (通り)}$$

である。したがって、赤玉7個と白玉5個の3つの箱A, B, Cへの入れ方の総数は、

$$36 \times 21 = 756 \text{ (通り)}$$

である。

(3)

まず、3つの箱のうち箱Aが空のときを考える。箱B, Cへの玉の入れ方は、箱B, Cのどちらかが空になってもよいとすると、(1), (2)と同様に考えて、

$${}_{7+1}C_1 \times {}_{5+1}C_1 = 48 \text{ (通り)}$$

である。このとき、箱B、もしくは箱Cにしか玉が入っていない入れ方は2通りである。したがって、箱Aが空で箱B, Cのどちらにも玉が入っている入れ方は

$$48 - 2 = 46 \text{ (通り)}$$

であり、箱Bのみ、もしくは箱Cのみが空となるときも同様であるから、2つの箱にのみ玉が入っている場合の数は $46 \times 3 = 138$ (通り) である。1つの箱にのみ玉が入るような入れ方は3通りであるから、どの箱にも1個以上の玉が入るような赤玉と白玉の入れ方の総数は、

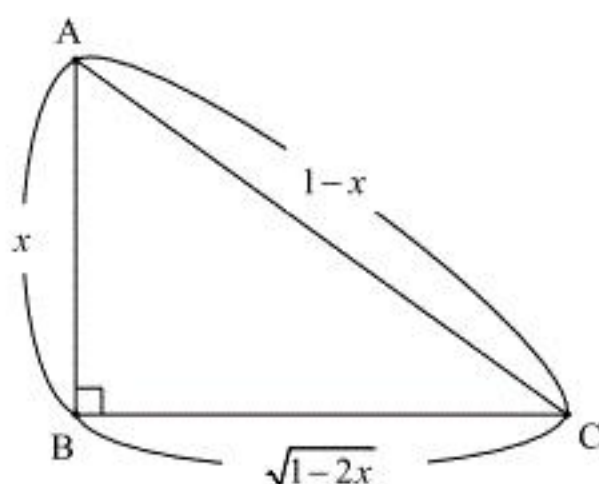
$$756 - 138 - 3 = 615 \text{ (通り)}$$

である。

〔解答〕

ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
0	1	2	1	2	1	2
タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	
3	2	1	3	1	6	

〔解説〕



$AB+AC=1$ であり、 $AB=x$ とおくと、 $AC=1-x$ である。それぞれの辺の長さが正でなければならないから、 $x>0$ かつ $1-x>0$ 、よって $0<x<1$ である。また $\triangle ABC$ において

$\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ であるから、直角三角形の斜辺 $AC > AB$ より、

$$1-x > x \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

である。以上より、 x のとり得る値の範囲は $0 < x < \frac{1}{2}$ である。三平方の定理より、

$$BC = \sqrt{(1-x)^2 - x^2} = \sqrt{1-2x}$$

である。 $\triangle ABC$ の面積を $f(x)$ とおくと、

$$f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1-2x}$$

となり、その導関数は、

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1-2x} - \frac{2x}{2\sqrt{1-2x}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \right)$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{3}$	...	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	最大	↘	

よって、 $x = \frac{1}{3}$ のとき $f(x)$ は最大となる。このとき $BC = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 、 $AC = \frac{2}{3}$ より、

$$\cos \angle BCA = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となるから、 $\angle BCA = \frac{1}{6}\pi$ である。

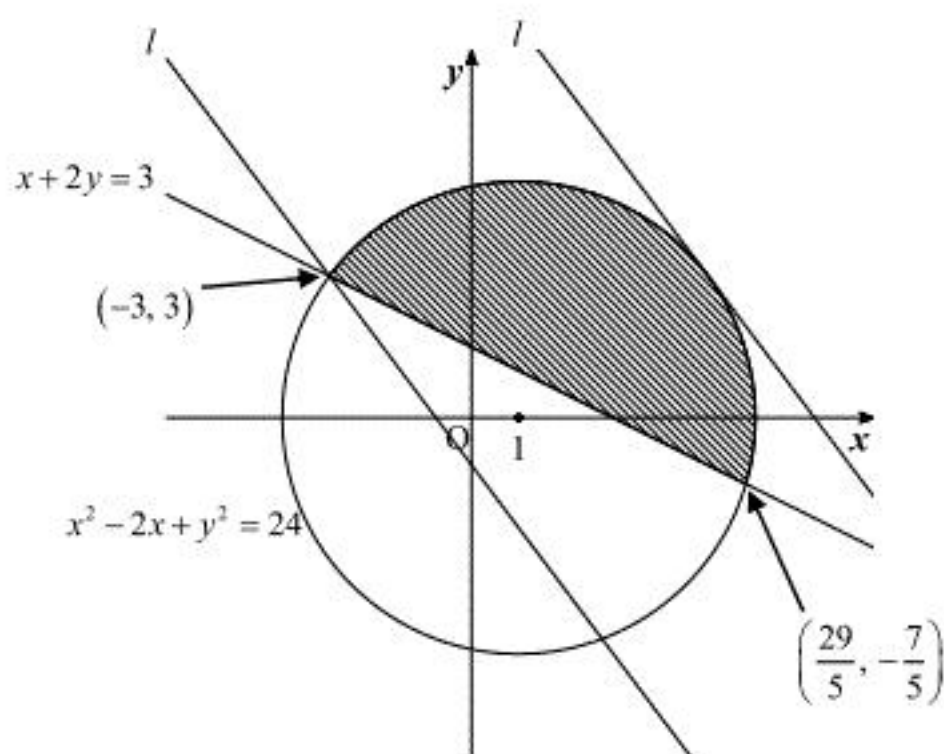
連立不等式

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 \leq 24 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 25 & \cdots \textcircled{1} \\ x+2y \geq 3 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

の表す領域について考える。円 $x^2 - 2x + y^2 = 24$ と直線 $x+2y=3$ の交点の y 座標は、両式から x を消去して、

$$\begin{aligned} (3-2y)^2 - 2(3-2y) + y^2 &= 24 \\ \Leftrightarrow 5y^2 - 8y - 21 &= 0 \\ \Leftrightarrow (5y+7)(y-3) &= 0 \\ \therefore y &= 3, -\frac{7}{5} \end{aligned}$$

となるから、交点の座標は $(-3, 3), \left(\frac{29}{5}, -\frac{7}{5}\right)$ となる。したがって、 $\textcircled{1}$ かつ $\textcircled{2}$ の表す領域は下図の斜線部分のようになる。ただし境界を含む。この領域を D とする。



$4x+3y=k$ とおくと、式変形して $y = -\frac{4}{3}x + \frac{k}{3}$ となるから、これは傾き $-\frac{4}{3}$ 、 y 切片 $\frac{k}{3}$ の直線を表す。この直線を l とすると、領域 D を点 (x, y) が動くときに $4x+3y$ の最大値と最小値を考えることは、直線 l と領域 D が共有点を持つように直線 l が動くときに直線 l の y 切片の最大値と最小値を考えることに対応させることができる。 k が最大となるのは上図を参考にすると、第1象限で直線 l が円 $x^2 - 2x + y^2 = 24$ に接するときである。このとき、直線 l と円の中心 $(1, 0)$ の距離が円の半径に等しくなるから、

$$\begin{aligned} \frac{|4 \cdot 1 - k|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} &= 5 \\ \Leftrightarrow 4 - k &= \pm 25 \\ \therefore k &= -21, 29 \end{aligned}$$

であり、 $k > 0$ より $4x+3y$ の最大値は 29 である。また、直線 l の傾きが直線 $x+2y=3$ の傾き $-\frac{1}{2}$ より小さいことに注意すると、直線 l が点 $(-3, 3)$ を通るときに k は最小になる。このとき

$$k = 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 3 = -3$$

である。

(答) 領域：前図の斜線部分(境界を含む)

$4x+3y$ の最大値：29，最小値：-3

(1)

曲線 $C: y = \frac{1}{x}$ 上の点 $A(1, 1)$ を通り、傾き $-m (0 < m < 1)$ の直線を n とする。直線 n の方程式は、

$$y - 1 = -m(x - 1) \Leftrightarrow y = -mx + m + 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。①式と曲線 $C: y = \frac{1}{x}$ から y を消去して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= -mx + m + 1 \\ \Leftrightarrow mx^2 - (m+1)x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(mx-1) &= 0 \\ \therefore x &= 1, \frac{1}{m} \end{aligned}$$

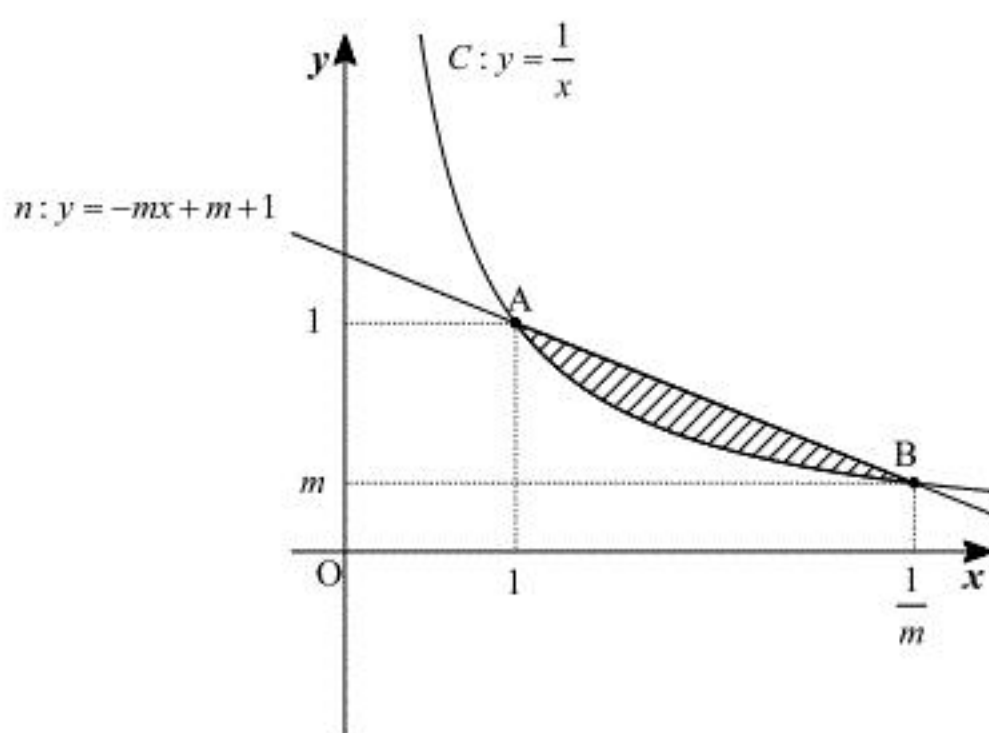
となるから、点 B の座標は、 $\left(\frac{1}{m}, m\right)$ である。また線分 AB の長さ ℓ は、

$$\ell = \sqrt{\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 + (m - 1)^2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad B\left(\frac{1}{m}, m\right), \quad \ell = \sqrt{\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 + (m - 1)^2}$$

(2)



直線 AB と曲線 C で囲まれた部分は上図の斜線部分のようになるから、

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{\frac{1}{m}} \left\{ -mx + (m+1) - \frac{1}{x} \right\} dx \\ &= \left[-\frac{m}{2}x^2 + (m+1)x - \log x \right]_1^{\frac{1}{m}} \\ &= -\frac{1}{2m} + 1 + \frac{1}{m} + \log m + \frac{m}{2} - (m+1) \\ &= \log m - \frac{1}{2}m + \frac{1}{2m} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \log m - \frac{1}{2}m + \frac{1}{2m}$$

(3)

$\lim_{m \rightarrow +0} m \log m = 0$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +0} \frac{S}{\ell} &= \lim_{m \rightarrow +0} \frac{\log m - \frac{1}{2}m + \frac{1}{2m}}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{m}\right)^2 + (1 - m)^2}} \\ &= \lim_{m \rightarrow +0} \frac{m \log m - \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}}{\sqrt{(m-1)^2 + (m-m^2)^2}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{m \rightarrow +0} \frac{S}{\ell} = \frac{1}{2}$$

(1)

数列 $\{a_n\}$ は,

$$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{4a_n}{3a_n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たす。よって,

$$a_2 = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 2 + 1} = \frac{8}{7}$$

$$a_3 = \frac{4 \cdot \frac{8}{7}}{3 \cdot \frac{8}{7} + 1} = \frac{32}{31}$$

$$a_4 = \frac{4 \cdot \frac{32}{31}}{3 \cdot \frac{32}{31} + 1} = \frac{128}{127}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_2 = \frac{8}{7}, a_3 = \frac{32}{31}, a_4 = \frac{128}{127}$$

(2)

帰納的に $a_n \neq 0$ であることがわかるから,

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n + 1}{4a_n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a_n} - 1 \right)$$

が成り立つ。よって, 数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} - 1 \right\}$ は, 初項 $\frac{1}{a_1} - 1 = -\frac{1}{2}$, 等比 $\frac{1}{4}$ の等比数列であるから,

$$\frac{1}{a_n} - 1 = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_n} = 1 - \frac{1}{2^{2n-1}}$$

$$\therefore a_n = \frac{2^{2n-1}}{2^{2n-1} - 1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{2^{2n-1}}{2^{2n-1} - 1}$$

(3)

$$a_n - 1 < 10^{-5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{2n-1}}{2^{2n-1} - 1} - 1 < 10^{-5}$$

$$\Leftrightarrow 10^5 < 2^{2n-1} - 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。ここで,

$$10^5 < 2^{2n-1} \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たす最小の自然数 n を考える。 $\log_{10} 2 = 0.3010$ であるから, 両辺の常用対数をとると,

$$10^5 < 2^{2n-1}$$

$$\Leftrightarrow 5 < (2n-1) \log_{10} 2$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{2} \left(\frac{5}{0.3010} + 1 \right)$$

$$\therefore n > 8.8 \dots$$

であるから, ②を満たす最小の自然数 n は 9 である。ここで, 自然数 k に対して 2^k の一の位に注目すると, $k = 1, 2, \dots$ のとき

$$2, 4, 8, 6, 2, 4, \dots$$

となる。いま, $k = 2n-1$ であるから $n = 9 \Leftrightarrow k = 17$ のとき, 2^{2n-1} の一の位は 2 であり, $2^{2n-1} - 1$ の一の位は 1 である。一方, 10^5 の一の位は 0 であるから, $10^5 < 2^{17}$ が成り立つとき, $10^5 < 2^{17} - 1$ も成り立つ。以上より, $a_n - 1 < 10^{-5}$ をみたす最小の自然数 n は 9 である。

$$(\text{答}) \quad n = 9$$