

【解答】

ア	1
イ	4
ウ	1
エ	5
オ	6
カ	3
キ	8
ク	5
ケ	8

【解説】

(1)(a)

$AB=4$, $BC=3$, $AC=2$, $\theta=\angle ACB$ であるから, $\triangle ABC$ に対して, 余弦定理より,

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2 \cdot BC \cdot AC} \\ &= \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 2} \\ &= -\frac{3}{12} \\ &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

である。

(b)

$\triangle ABC$ の内接円の半径を r , 面積を S とおくと,

$$S = \frac{1}{2}(4+3+2)r = \frac{9}{2}r$$

となる。また, $0 < \theta < \pi$ であるから $\sin\theta > 0$ であるから, (a) より

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

であるので,

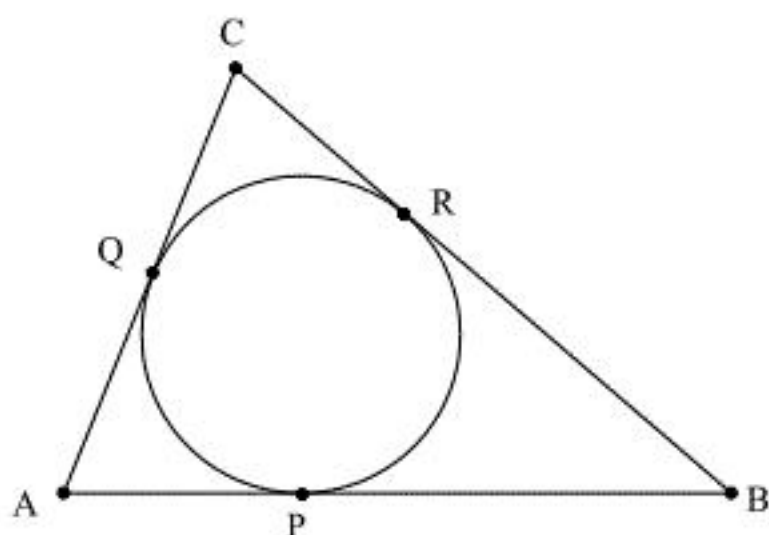
$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \sin\theta = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

となる。ゆえに,

$$\begin{aligned}\frac{9}{2}r &= \frac{3\sqrt{15}}{4} \\ \therefore r &= \frac{\sqrt{15}}{6}\end{aligned}$$

である。

(2)



図のように点 Q, R をとると, $AP=AQ$, $BR=BP$, $CQ=CR$ となるので, $CQ=t$ とおくと, $CR=CQ=t$ であり, $AP=AQ=2-t$, $BP=BR=3-t$ である。ここで, $AB=AP+BP=4$ であるので,

$$\begin{aligned}(3-t) + (2-t) &= 4 \\ \therefore t &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。ゆえに,

$$AP:BP = \frac{5}{2}:\frac{3}{2} = 5:3$$

であるので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP} &= \frac{3}{5+3}\vec{a} + \frac{5}{5+3}\vec{b} \\ &= \frac{3}{8}\vec{a} + \frac{5}{8}\vec{b}\end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

コ	1
サ	7
シ	8
ス	2
セ	1
ソ	5
タ	1
チ	6
ツ	1
テ	5
ト	3
ナ	6
ニ	2
ヌ	9

〔解説〕

(1)

部分積分を用いると、

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{1}{2}}^2 x \log x dx &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{2} x^2 \right)' \log x dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} x^2 \log x \right]_{\frac{1}{2}}^2 - \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} \right) dx \\
 &= 2 \log 2 - \frac{1}{8} \log \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_{\frac{1}{2}}^2 \\
 &= 2 \log 2 + \frac{1}{8} \log 2 - \left(1 - \frac{1}{16} \right) \\
 &= \frac{17}{8} \log 2 - \frac{15}{16}
 \end{aligned}$$

が得られる。

(2)

 $y = x + 1$ とすると、 $\frac{dy}{dx} = 1$ であり

$$\begin{array}{c|ccc}
 x & 0 & \rightarrow & 2 \\
 \hline
 y & 1 & \rightarrow & 3
 \end{array}$$

であるから、

$$\int_0^2 (x^2 + 2x + 3) \log(x+1) dx = \int_1^3 (y^2 + 2) \log y dy$$

となる。(1)と同様に計算すると、

$$\begin{aligned}
 \int_1^3 (y^2 + 2) \log y dy &= \int_1^3 \left(\frac{1}{3} y^3 + 2y \right)' \log y dy \\
 &= \left[\left(\frac{1}{3} y^3 + 2y \right) \log y \right]_1^3 - \int_1^3 \left(\frac{1}{3} y^3 + 2y \right) \frac{1}{y} dy \\
 &= (9 + 6) \log 3 - \left[\frac{1}{9} y^3 + 2y \right]_1^3 \\
 &= 15 \log 3 - \left(\frac{26}{9} + 4 \right) \\
 &= 15 \log 3 - \frac{62}{9}
 \end{aligned}$$

が得られる。

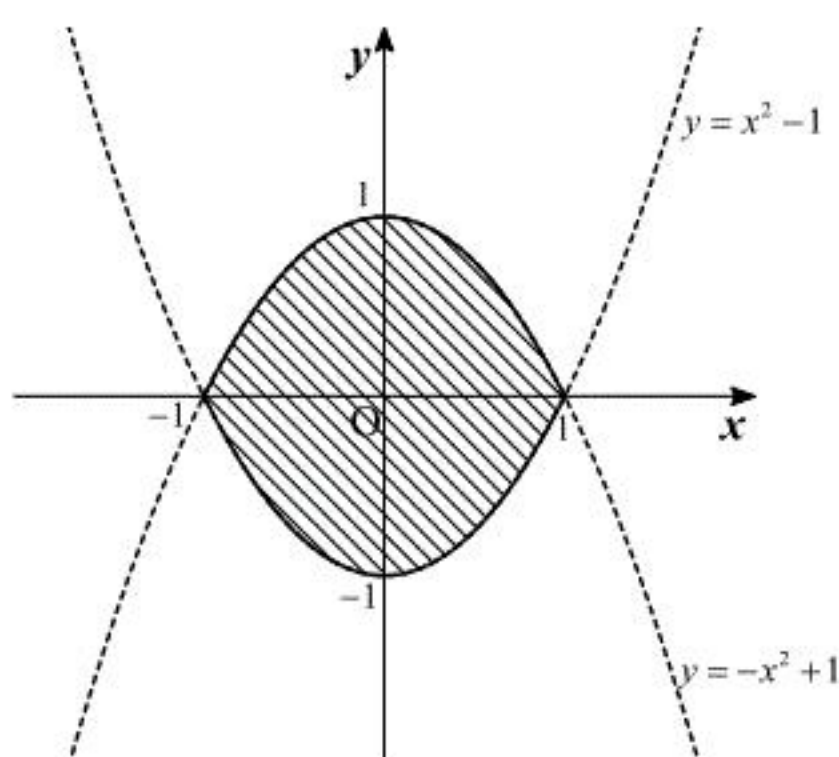
(1)

$|y| = -x^2 + 1$ は x 軸対称であるから、 $y \geq 0$ の範囲で考えると、

$$|y| \leq -x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow y \leq -x^2 + 1$$

である。よって対称性から、不等式 $|y| \leq -x^2 + 1$ の表す領域は下図の斜線部となる。ただし、境界線を含む



(答) 前図

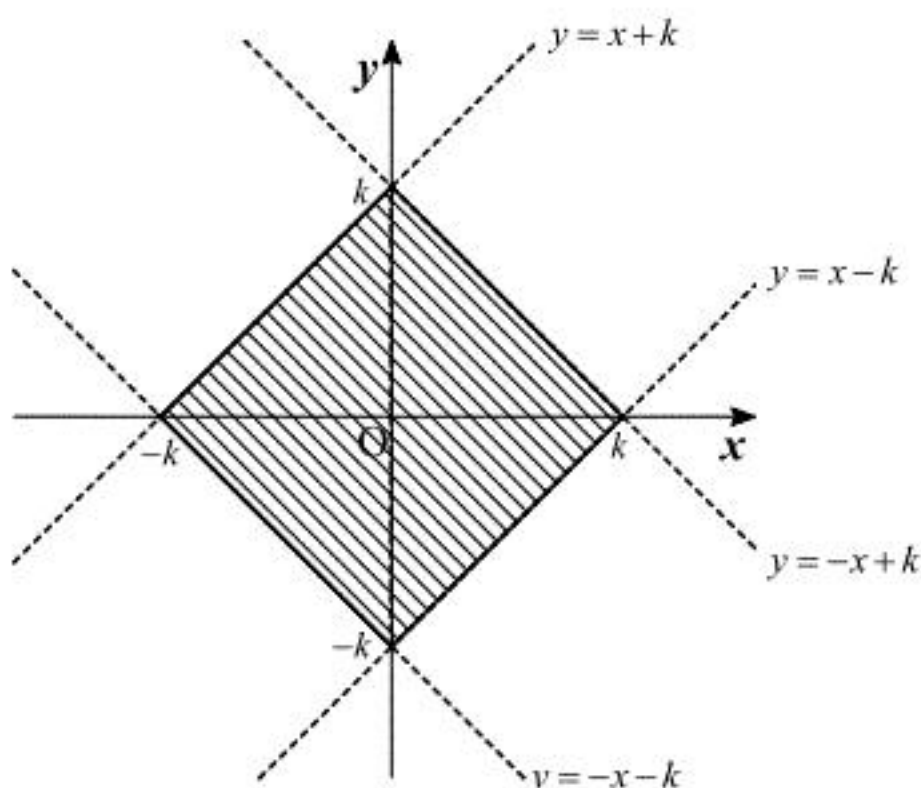
(2)

$|x| + |y| = k$ は x 軸対称かつ y 軸対称であるから、 $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ の範囲で考えると、

$$|x| + |y| \leq k$$

$$\Leftrightarrow y \leq -x + k$$

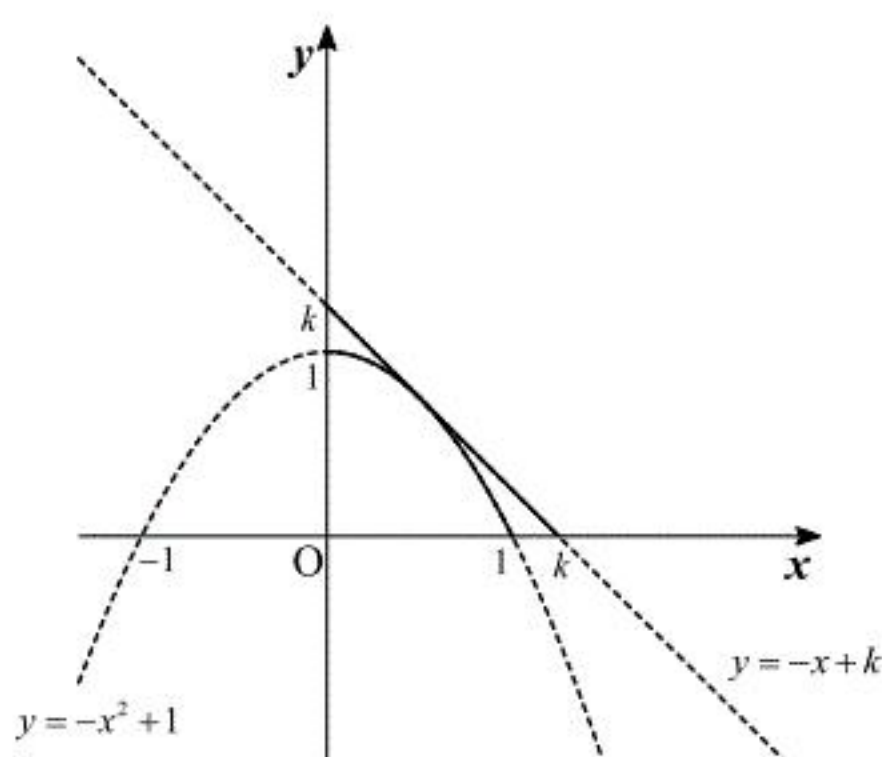
である。よって対称性から、不等式 $|x| + |y| \leq k$ の表す領域は下図の斜線部となる。ただし、境界線を含む



(答) 前図

(3)

命題「 $|y| \leq -x^2 + 1$ ならば $|x| + |y| \leq k$ 」は、命題「(1)で求めた領域が(2)で求めた領域内にすべて収まる」と同値であるので、それを満たす k の範囲を求める。また、対称性より、 $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ の範囲で考えると、下図のように放物線 $y = -x^2 + 1$ が直線 $y = -x + k$ と接するか、もしくは y について負方向にあればよい。



このとき、二次方程式 $-x^2 + 1 = -x + k \Leftrightarrow x^2 - x + k - 1 = 0$ の判別式を D とすると、求める条件は、

$$D \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (-1)^2 - 4(k-1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4k \geq 5$$

$$\therefore k \geq \frac{5}{4}$$

である。

(答) $k \geq \frac{5}{4}$

$f(3)=19$ より、整式 $P(x)$ を用いて、 $f(x)=(x-3)P(x)+19$ とあらわせる。このとき、

$$f'(x)=P(x)+(x-3)P'(x)$$

であり、また $f'(3)=10$ であるから、 $P(3)=10$ である。ゆえに、整式 $Q(x)$ を用いて、

$$P(x)=(x-3)Q(x)+10 \text{ とあらわせ、}$$

$$f(x)=(x-3)\{(x-3)Q(x)+10\}+19$$

$$\Leftrightarrow f(x)=(x-3)^2 Q(x)+10x-11$$

となる。ここで、 $f(-1)=11$ より、

$$11=16 \cdot Q(-1)-10-11$$

$$\Leftrightarrow Q(-1)=2$$

となるので、整式 $R(x)$ を用いて $Q(x)=(x+1)R(x)+2$ とあらわせ、

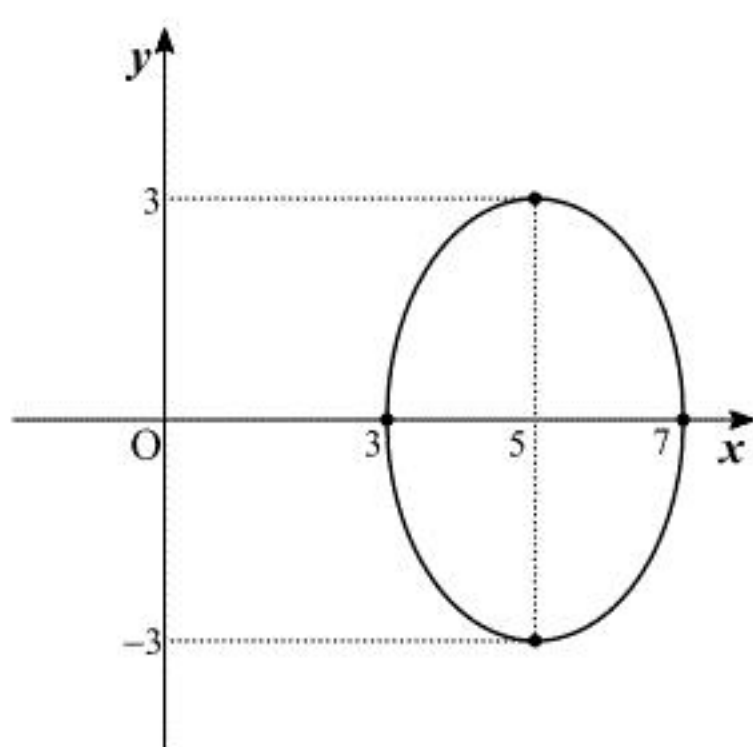
$$f(x)=(x-3)^2 \{(x+1)R(x)+2\}+10x-11$$

$$\Leftrightarrow f(x)=(x-3)^2 (x+1)R(x)+2x^2-2x+7$$

となる。ゆえに、 $f(x)$ を $(x-3)^2(x+1)$ で割った余りは、 $2x^2-2x+7$ である。

(1)

$C: \frac{(x-5)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ であるから、グラフの概形は下図のような楕円になる。



(答) 上図

(2)

$$V_1 = \int_3^7 \pi y^2 dx = \pi \int_3^7 y^2 dx$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{(x-5)^2}{4} + \frac{y^2}{9} &= 1 \\ \Leftrightarrow y^2 &= -\frac{9}{4}(x-5)^2 + 9 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_3^7 \left\{ -\frac{9}{4}(x-5)^2 + 9 \right\} dx \\ &= \pi \left[-\frac{3}{4}(x-5)^3 + 9x \right]_3^7 \\ &= \pi \left\{ -\frac{3}{4}(8+8) + 9(7-3) \right\} \\ &= 24\pi \end{aligned}$$

である。

(答) $V_1 = 24\pi$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{(x-5)^2}{4} + \frac{y^2}{9} &= 1 \\ \Leftrightarrow (x-5)^2 &= \frac{4}{9}(9-y^2) \\ \Leftrightarrow x &= 5 \pm \frac{2}{3}\sqrt{9-y^2} \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 + \frac{2}{3}\sqrt{9-y^2} \\ x_2 &= 5 - \frac{2}{3}\sqrt{9-y^2} \end{aligned}$$

とおくと、

$$V_2 = \int_{-3}^3 (\pi x_1^2) dy - \int_{-3}^3 (\pi x_2^2) dy = \pi \int_{-3}^3 (x_1^2 - x_2^2) dy$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_{-3}^3 \left\{ \left(5 + \frac{2}{3}\sqrt{9-y^2} \right)^2 - \left(5 - \frac{2}{3}\sqrt{9-y^2} \right)^2 \right\} dy \\ &= \pi \int_{-3}^3 \frac{40}{3} \sqrt{9-y^2} dy \end{aligned}$$

となる。ここで、 $y = 3 \sin \theta$ とおくと、 $\frac{dy}{d\theta} = 3 \cos \theta$ 、

y	-3	$\rightarrow$	3
θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

であるから、 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で $3 \cos \theta \geq 0$ であり

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{40}{3} \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos \theta \cdot 3 \cos \theta d\theta \\ &= 60\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= 60\pi \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 60\pi^2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $V_2 = 60\pi^2$