

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ
$\frac{11}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{8\sqrt{3}}{9}$	10

〔解説〕

(1)

$$|x(x-1)| = \begin{cases} x(x-1) & (x < 0 \text{ または } x \geq 1 \text{ のとき}) \\ -x(x-1) & (0 \leq x < 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 |x(x-1)| dx &= \int_{-1}^0 x(x-1) dx + \int_0^1 \{-x(x-1)\} dx + \int_1^2 x(x-1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{11}{6} \end{aligned}$$

である。

(2)

3倍角の公式より、 $\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$ であるから、

$$f(\theta) = \sin \theta + 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta = -4\sin^3 \theta + 4\sin \theta$$

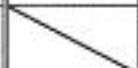
である。ここで、 $\sin \theta = t$ とおくと、 θ が実数全体を動くとき、 $-1 \leq t \leq 1$ であり、

$$f(\theta) = -4t^3 + 4t$$

となる。ここで、 $g(t) = -4t^3 + 4t$ とおき、この関数の最大値を求める。

$$\begin{aligned} g'(t) &= -12t^2 + 4 \\ &= -12 \left(t^2 - \frac{1}{3} \right) \\ &= -12 \left(t - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(t + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

であるから、増減表を書くと、

t	-1	...	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	...	1
$g'(t)$		-	0	+	0	-	
$g(t)$			極小		極大		

となる。

$$g(-1) = 4 - 4 = 0$$

であり、

$$g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{9} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$$

となるから、 $f(\theta)$ は $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 、すなわち $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき、最大値 $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ をとる。

(3)

 n を自然数とする。預けて n 年後の元利合計を k 万円とすると、

$$k = 100 \cdot \left(\frac{105}{100} \right)^n = 100 \cdot \left(\frac{21}{20} \right)^n$$

である。両辺の常用対数をとると、

$$\begin{aligned} \log_{10} k &= \log_{10} 100 + n \log_{10} \frac{21}{20} \\ &= 2 \log_{10} 10 + n (\log_{10} 7 + \log_{10} 3 - \log_{10} 10 - \log_{10} 2) \end{aligned}$$

となる。よって元利合計が160万円以上になる条件は

$$\begin{aligned} k &\geq 160 \\ \Leftrightarrow \log_{10} k &\geq \log_{10} 160 \\ \Leftrightarrow 2 \log_{10} 10 + n (\log_{10} 7 + \log_{10} 3 - \log_{10} 10 - \log_{10} 2) &\geq \log_{10} 160 \end{aligned}$$

である。ここで、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 7 = 0.8451$, $\log_{10} 10 = 1$ を代入すると、

$$(\text{左辺}) = 2 \log_{10} 10 + n (\log_{10} 7 + \log_{10} 3 - \log_{10} 10 - \log_{10} 2) = 2 + 0.0212 \cdot n$$

$$(\text{右辺}) = \log_{10} 160 = \log_{10} 10 + 4 \log_{10} 2 = 2.2040$$

となる。ゆえに、

$$\begin{aligned} 2 \log_{10} 10 + n (\log_{10} 7 + \log_{10} 3 - \log_{10} 10 - \log_{10} 2) &\geq \log_{10} 160 \\ \Leftrightarrow 2 + 0.0212 \cdot n &\geq 2.2040 \\ \Leftrightarrow n &\geq \frac{0.2040}{0.0212} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 9 + \frac{33}{53}$$

であるから、元利合計が初めて160万円以上になるのは10年後である。

(1)

1辺の長さが1の正三角形の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

である。 S_1 はこの正三角形6つからなる図形であるから、

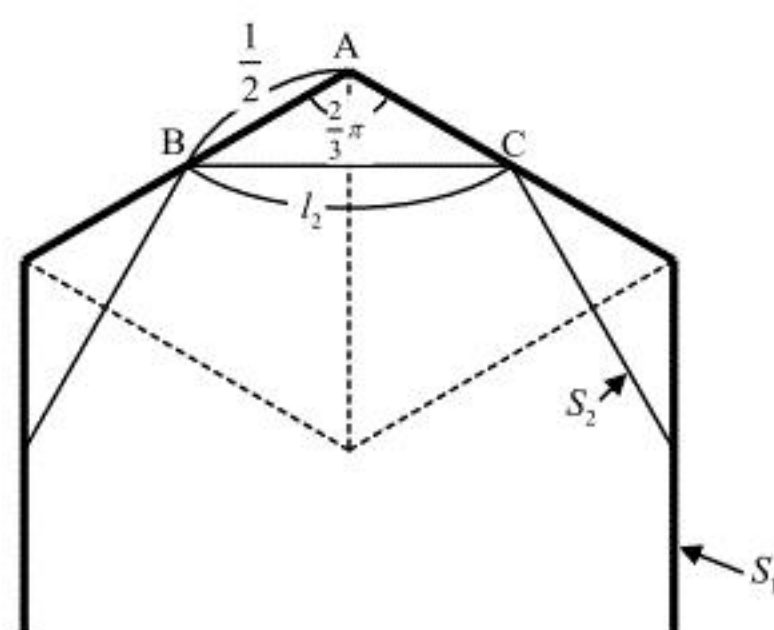
$$s_1 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(2)

S_2 の1辺の長さを l_2 とおく。下図は S_1 と S_2 の一部を取り出したものである。



上図の三角形ABCに対し、余弦定理より、

$$\begin{aligned} l_2^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} s_2 : s_1 &= l_2^2 : l_1^2 \\ \therefore s_2 &= s_1 \cdot \frac{l_2^2}{l_1^2} = \frac{9\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{9\sqrt{3}}{8}$$

(3)

S_n の1辺の長さを l_n とおく。(2)と同様に考えて、余弦定理より、

$$\begin{aligned} l_{n+1}^2 &= l_n^2 + l_n^2 - 2 \cdot l_n \cdot l_n \cdot \cos \frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{3}{4} l_n^2 \end{aligned}$$

である。ゆえに、

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n \cdot \frac{l_{n+1}^2}{l_n^2} \\ &= \frac{3}{4} s_n \end{aligned}$$

となる。(1)より、 $s_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ であるので、

$$s_n = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n s_k &= \sum_{k=1}^n \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \right\}}{1 - \frac{3}{4}} \\ &= 6\sqrt{3} \left\{ 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \right\} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 6\sqrt{3} \left\{ 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \right\}$$

(1)

$x^2 + y^2 \leq 1$ は、原点中心で半径1の円周上と円の内部の領域を表す。また、

$$7x + 9y \leq 3 \Leftrightarrow y \leq -\frac{7}{9}x + \frac{1}{3}$$

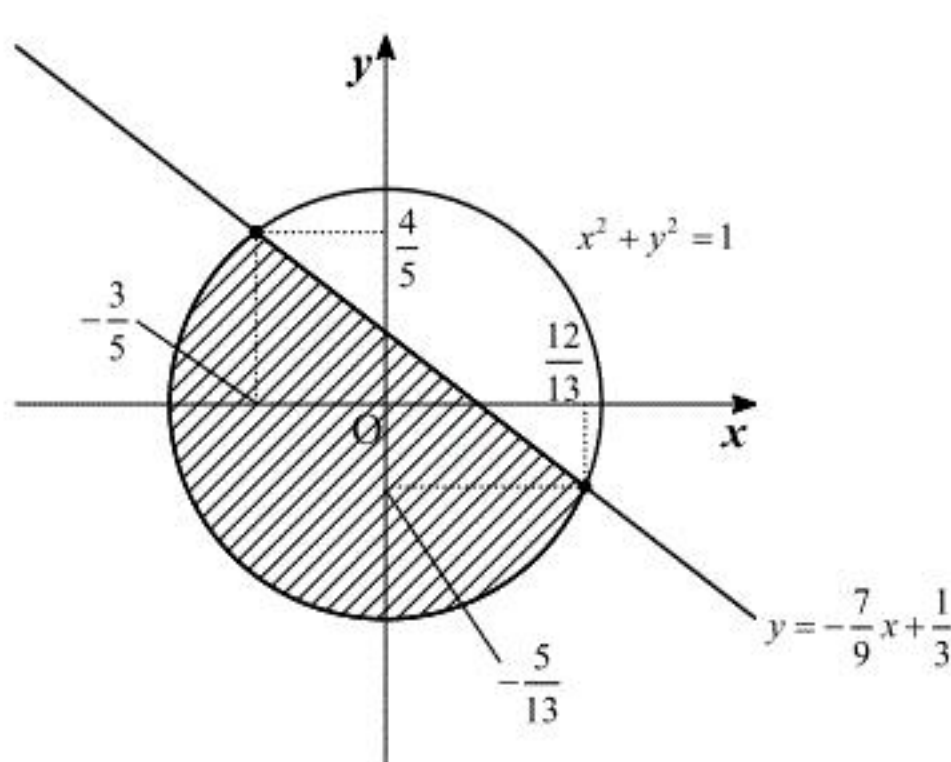
であり、これは直線 $y = -\frac{7}{9}x + \frac{1}{3}$ 上とその直線より下の領域を表す。次に、円 $x^2 + y^2 = 1$ と直

線 $y = -\frac{7}{9}x + \frac{1}{3}$ の交点を求める。交点の x 座標は、 $x^2 + y^2 = 1$ に $y = -\frac{7}{9}x + \frac{1}{3}$ を代入して y を消去すると、

$$\begin{aligned} x^2 + \left(-\frac{7}{9}x + \frac{1}{3}\right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{130}{81}x^2 - \frac{14}{27}x - \frac{8}{9} &= 0 \\ \Leftrightarrow 65x^2 - 21x - 36 &= 0 \\ \Leftrightarrow (13x - 12)(5x + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{12}{13}, -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

と求まり、 $y = -\frac{7}{9}x + \frac{1}{3}$ に代入すると、交点の座標は $\left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right), \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ とわかる。よって、

求める領域は下図のようになる。ただし、境界線を含む。



(答) 上図の斜線部 (境界を含む)

(2)

$3x - y = k$ とおくと、直線 $y = 3x - k$ の y 切片が最大値をとるとき k は最小値をとり、 y 切片が最小値をとるとき k は最大値をとる。ゆえに、直線 $y = 3x - k$ が (1) の領域を通る場合での y 切片の最大値と最小値を考える。直線 $y = 3x - k$ が円 $x^2 + y^2 = 1$ と接するとき、接点を (p, q) とおくと、接線の方程式は $px + qy = 1$ となる。これが $y = 3x - k$ となるので、 $q \neq 0$ であることに注意すると、

$$-\frac{p}{q} = 3 \Leftrightarrow p = -3q$$

である。一方、点 (p, q) は円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点であるから $p^2 + q^2 = 1$ を満たす。 $p = -3q$ を代入すると、

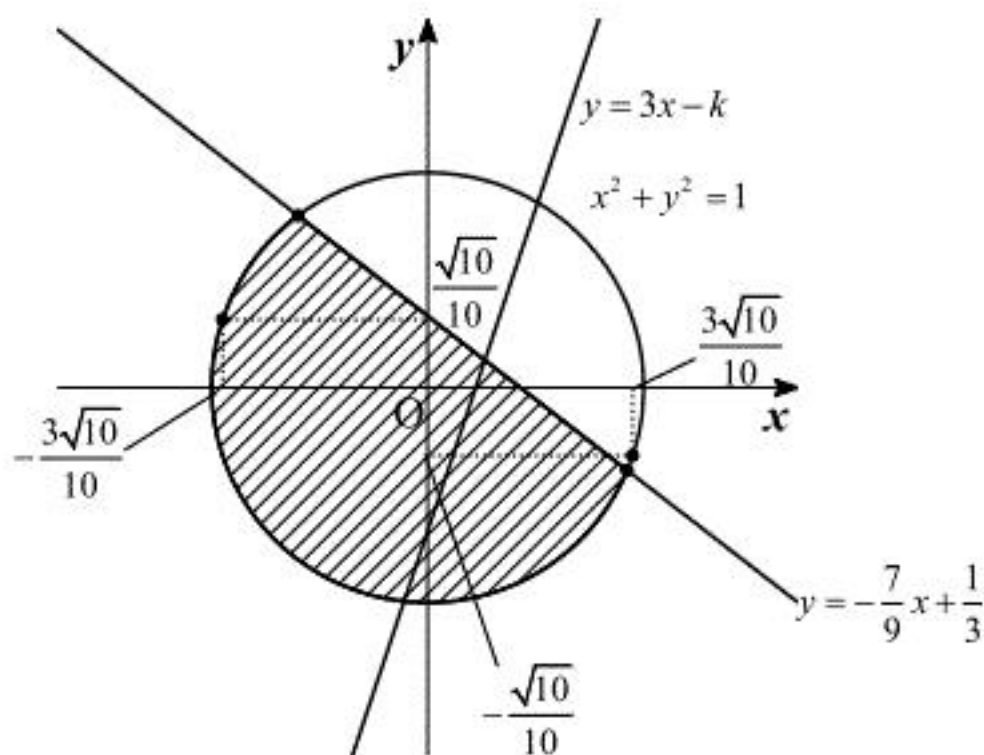
$$\begin{aligned} q^2 + 9q^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow q^2 &= \frac{1}{10} \\ \therefore q &= \pm \frac{\sqrt{10}}{10} \end{aligned}$$

となる。 $p = -3q$ に代入すると、接点は $\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}\right), \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$ とわかる。

$\sqrt{10} > 3.1$ から、

$$\begin{aligned} -\frac{3\sqrt{10}}{10} &< -\frac{3}{10} \cdot 2 = -\frac{3}{5} \\ \frac{3\sqrt{10}}{10} &> \frac{3}{10} \cdot \frac{40}{13} = \frac{12}{13} \end{aligned}$$

より、これらの点は下図の位置にある。



上図より、直線 $y = 3x - k$ の y 切片が最小となるのは点 $\left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$ を通るときである。このとき、 k は最大値

$$\begin{aligned} k &= 3 \cdot \frac{12}{13} - \left(-\frac{5}{13}\right) \\ &= \frac{41}{13} \end{aligned}$$

をとる。直線 $y = 3x - k$ の y 切片が最大となるのは点 $\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$ で接するときである。このとき、 k は最小値

$$\begin{aligned} k &= 3 \cdot \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) - \frac{\sqrt{10}}{10} \\ &= -\sqrt{10} \end{aligned}$$

をとる。

(答) 最大値: $\frac{41}{13}$, 最小値: $-\sqrt{10}$