

[解答]

ア	イ	ウ	エ
$2 \tan^2 \theta + 3 \tan \theta - 5$	$\frac{\pi}{4}$	$1 + 3\sqrt{3}$	$-\frac{49}{8}$

[解説]

(1)

$$\begin{aligned}
 \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\
 &= 2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \cos^2 \theta \\
 &= \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \\
 \cos 2\theta &= 2 \cos^2 \theta - 1 \\
 &= \frac{2}{1 + \tan^2 \theta} - 1 \\
 &= \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}
 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
 f(\theta) &= \frac{3 \cdot \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} - 7 \cdot \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} - 3}{1 + \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}} \\
 &= \frac{6 \tan \theta - 7(1 - \tan^2 \theta) - 3(1 + \tan^2 \theta)}{1 + \tan^2 \theta + 1 - \tan^2 \theta} \\
 &= 2 \tan^2 \theta + 3 \tan \theta - 5
 \end{aligned}$$

となる。

(2)

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき, $\tan \theta > 0$ である。ここで, $f(\theta) = 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
 2 \tan^2 \theta + 3 \tan \theta - 5 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (2 \tan \theta + 5)(\tan \theta - 1) &= 0 \\
 \therefore \tan \theta &= 1 \quad (\because \tan \theta > 0)
 \end{aligned}$$

となる。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $\theta = \frac{\pi}{4}$ となる。

(3)

$-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ のとき, $-\sqrt{3} \leq \tan \theta \leq \sqrt{3}$ である。ここで,

$$\begin{aligned}
 f(\theta) &= 2 \tan^2 \theta + 3 \tan \theta - 5 \\
 &= 2 \left(\tan \theta + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{49}{8}
 \end{aligned}$$

であるから, $\tan \theta = -\frac{3}{4}$ のとき最小値 $-\frac{49}{8}$ をとる。また, 最大値をとるのは $\tan \theta = \sqrt{3}$ のとき

であり, そのとき

$$\begin{aligned}
 f(\theta) &= 2(\sqrt{3})^2 + 3\sqrt{3} - 5 \\
 &= 1 + 3\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

となる。

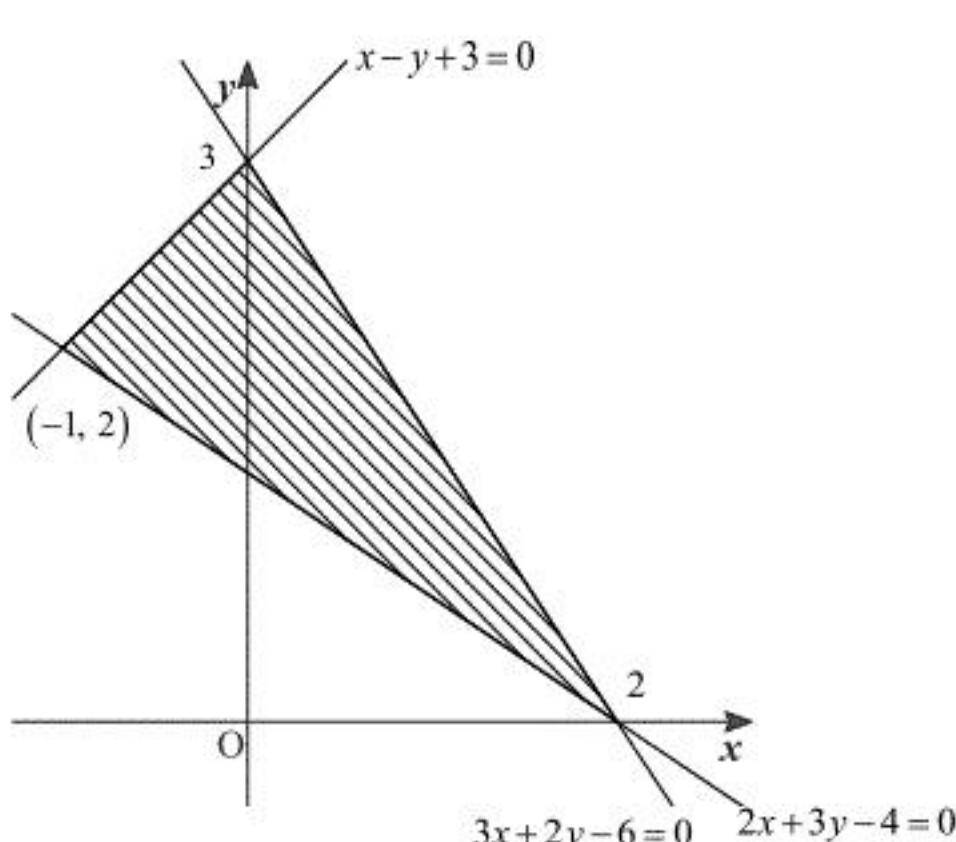
(1)

$$\begin{cases} x-y+3=0 & \dots\dots ① \\ 2x+3y-4=0 & \dots\dots ② \\ 3x+2y-6=0 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

の3つの直線の交点の座標を求める。①より $x=y-3$ となるから、これを②に代入して

$$\begin{aligned} 2(y-3)+3y-4 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= 2 \end{aligned}$$

となる。このとき $x=-1$ であるから、①と②の交点は $(-1, 2)$ である。同様にして、②と③の交点は $(2, 0)$ であり、③と①の交点は $(0, 3)$ となることから、領域 D は以下ようになる。ただし、境界は含む。



(答) 前図

(2)

$$\begin{aligned} (1+a)x+(1-a)y-6 &= 0 \\ \Leftrightarrow x+y-6+(x-y)a &= 0 \end{aligned}$$

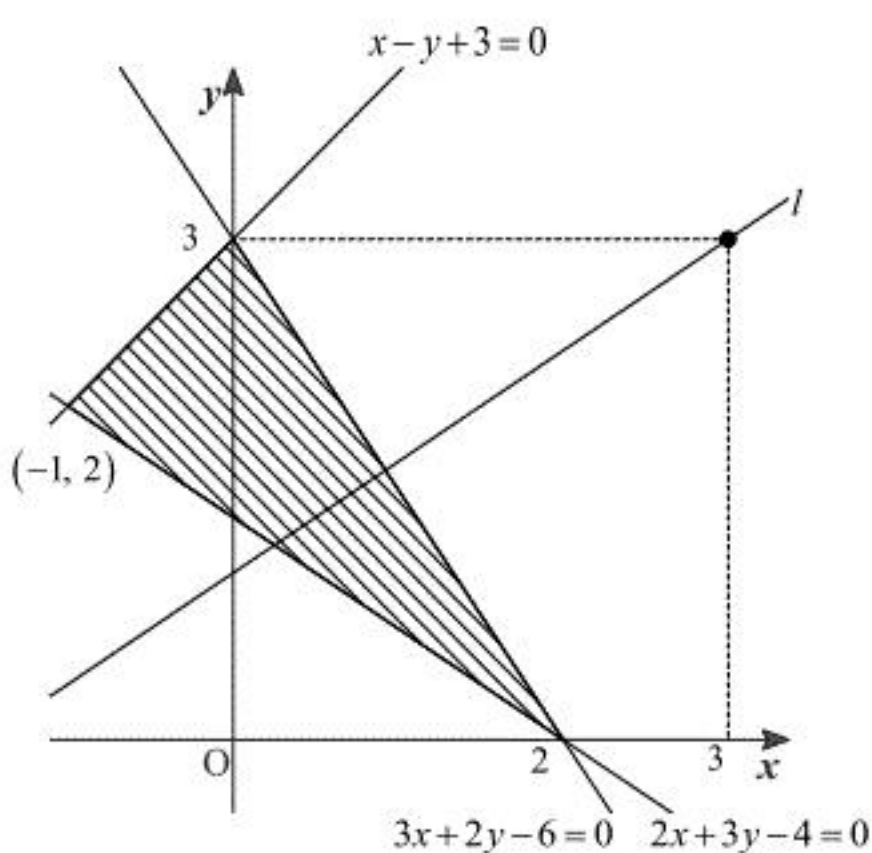
となり、これが a の値にかかわらず成り立つ (x, y) は、

$$\begin{aligned} x+y-6=0 \text{ かつ } x-y &= 0 \\ \Leftrightarrow (x, y) &= (3, 3) \end{aligned}$$

となるときである。よって、直線 l が a の値にかかわらず定点 $(3, 3)$ を通る。

(証明終)

(3)



$a=1$ のとき、直線 l は $x=3$ となり、領域 D を通ることはない。 $a \neq 1$ のとき、直線 l は

$$\begin{aligned} (1+a)x+(1-a)y-6 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{a+1}{a-1}x - \frac{6}{a-1} \quad (\because a \neq 1) \end{aligned}$$

となるから、直線 l の傾きは $\frac{a+1}{a-1}$ である。(2)より直線 l は $(3, 3)$ を通る直線であるから、上図のように図示できる。直線 l が $(0, 3)$ を通るとき、傾きは0であり、直線 l が $(2, 0)$ を通るとき、傾きは

$$\frac{3}{3-2} = 3$$

である。これと図より、直線 l と領域 D が共有点をもつときの条件は、

$$0 \leq \frac{a+1}{a-1} \leq 3$$

となればよい。 $a \neq 1$ より $(a-1)^2 > 0$ であるから、これをかけて、

$$0 \leq (a+1)(a-1) \leq 3(a-1)^2$$

となる。また、

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a+1)(a-1) \\ \Leftrightarrow a &\leq -1, 1 < a \quad (\because a \neq 1) \end{aligned}$$

となり、

$$(a+1)(a-1) \leq 3(a-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 3(a-1)^2 - (a+1)(a-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(a-1)(a-2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a < 1, 2 \leq a \quad (\because a \neq 1)$$

であるから、

$$0 \leq (a+1)(a-1) \leq 3(a-1)^2$$

$$\Leftrightarrow a \leq -1, 2 \leq a$$

となる。以上より求める a の範囲は $a \leq -1, 2 \leq a$ となる。

(答) $a \leq -1, 2 \leq a$

[解答]

オ	カ	キ	ク
$\frac{26}{27}$	4	$\frac{19}{27}$	$\frac{851}{216}$

[解説]

(1)

チャレンジが失敗する確率を考える。これは3回さいころを振って、出る目が全て2以下となる確率であるから、

$$\left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

となる。よって、チャレンジが成功する確率は、

$$1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$$

となる。

(2)

基本点が多いほどチャレンジが成功する確率は低くなる。基本点が4のとき、チャレンジが失敗する確率は3回さいころを振って、出る目が全て4以下となる確率であるから、

$$\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

となる。よって、チャレンジが成功する確率は、

$$1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27} > \frac{1}{2}$$

となる。基本点が5のとき、チャレンジが失敗する確率は3回さいころを振って、出る目が全て5以下となる確率であるから、

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

となる。よって、チャレンジが成功する確率は、

$$1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} < \frac{1}{2}$$

となる。よって、チャレンジが成功する確率が $\frac{1}{2}$ より大きくなる最大の基本点は4で、その確

率は $\frac{19}{27}$ となる。

(3)

チャレンジが成功して6点になる確率は3回さいころを振って、6が少なくとも一回出る確率であるから、

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}$$

となる。チャレンジが成功して5点になる確率は、チャレンジが成功するが6点ではない確率であるから、

$$\frac{19}{27} - \frac{91}{216} = \frac{61}{216}$$

となる。チャレンジが失敗する確率は(2)より $\frac{8}{27}$ であり、このときの得点は0点であるから、

求める期待値は

$$\frac{61}{216} \cdot 5 + \frac{91}{216} \cdot 6 + \frac{8}{27} \cdot 0 = \frac{851}{216}$$

となる。

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int_0^1 (e^x - te^t)^2 dt \\
 &= e^{2x} \int_0^1 dt - 2e^x \int_0^1 te^t dt + \int_0^1 t^2 e^{2t} dt
 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 te^t dt &= [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt \\
 &= e - [e^t]_0^1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 t^2 e^{2t} dt &= \left[t^2 \cdot \frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^1 - \int_0^1 te^{2t} dt \\
 &= \frac{1}{2} e^2 - \left[t \cdot \frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2t} dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^1 \\
 &= \frac{e^2 - 1}{4}
 \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}
 g(x) &= e^{2x} - 2e^x + \frac{e^2 - 1}{4} \\
 &= (e^x - 1)^2 + \frac{e^2 - 5}{4}
 \end{aligned}$$

となるから、 $e^x = 1$ つまり、 $x = 0$ のとき、最小値 $\frac{e^2 - 5}{4}$ をとる。

(答) $x = 0$ のとき、最小値 $\frac{e^2 - 5}{4}$

$y=f(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}$ とすると、 $x+1\neq 0$ より、 $x\neq -1$ である。また、

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(x+1)^2-2(x-1)(x+1)}{(x+1)^4} \\&= \frac{x+1-2(x-1)}{(x+1)^3} \\&= \frac{-x+3}{(x+1)^3} \\f''(x) &= \frac{-(x+1)^3-3(-x+3)(x+1)^2}{(x+1)^6} \\&= \frac{-(x+1)-3(-x+3)}{(x+1)^4} \\&= \frac{2x-10}{(x+1)^4}\end{aligned}$$

となる。よって、 $f'(x)=0$ となるのは $x=3$ となるときで、 $f''(x)=0$ となるのは、 $x=5$ となるときである。以上から、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	…	-1	…	3	…	5	…
$f'(x)$	-		+	0	-	-	-
$f''(x)$	-		-	-	-	0	+
$f(x)$				極大		変曲点	

よって、

$$\begin{aligned}f(3) &= \frac{3-1}{(3+1)^2} \\&= \frac{1}{8} \\f(5) &= \frac{5-1}{(5+1)^2} \\&= \frac{1}{9}\end{aligned}$$

となるから、 $y=f(x)$ は $x=3$ で極大値 $\frac{1}{8}$ をとり、変曲点は $\left(5,\frac{1}{9}\right)$ である。また、

$$\begin{aligned}\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{x-1}{(x+1)^2} &= 0 \\ \lim_{x\rightarrow-\infty}\frac{x-1}{(x+1)^2} &= 0 \\ \lim_{x\rightarrow-1-0}\frac{x-1}{(x+1)^2} &= -\infty \\ \lim_{x\rightarrow-1+0}\frac{x-1}{(x+1)^2} &= -\infty\end{aligned}$$

となることから、 $y=f(x)$ の漸近線は $x=-1, y=0$ である。したがって、 $y=f(x)$ の概形は以下のようになる。

