

〔解答〕

ア	イ	ウ
-1	$\frac{5}{84}$	$\frac{15}{2}$

〔解説〕

(1)

実数 b を用いて、等比数列 $\{a_n\}$ の公比を b とおくと、 $a_n = a_1 b^{n-1}$ と表すことができ、条件より

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= a_3 \\ \Leftrightarrow a_1(1 + b + b^2 + b^3 + b^4) &= a_1 b^2 \end{aligned}$$

となる。 $a_1 \neq 0$ より

$$\begin{aligned} 1 + b + b^2 + b^3 + b^4 &= b^2 \\ \Leftrightarrow 1 + b + b^3 + b^4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 + b)(1 + b^3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 + b)^2(1 - b + b^2) &= 0 \\ \therefore b = -1 &\left(\because b^2 - b + 1 = \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \right) \end{aligned}$$

となる。したがって等比数列 $\{a_n\}$ の公比は -1 である。

(2)(a)

10 枚のカードから 5 枚を取り出す場合の数は ${}_{10}C_5 = 252$ (通り) であり、これらは同様に確からしい。得点 7 を得るとき、取り出したカードは 1 から 7 までのカードのいずれかであり、7 は必ず含まれている。すなわち取り出したカードのうち 1 枚が 7 であり、残りの 4 枚が 1 から 6 までのカードのいずれかであるから、得点が 7 となる場合の数は

$${}_6C_4 = 15 \text{ (通り)}$$

である。よって、求める確率は

$$\frac{15}{252} = \frac{5}{84}$$

である。

(b)

8 枚のカードから 5 枚を取り出す場合の数は ${}_8C_5 = 56$ (通り) であり、これらは同様に確からしい。また、得点は 5 枚のカードの番号のうち最大のものであるから、5 以上である。得点が k ($k = 5, 6, 7, 8$) となる場合の数は、(1) と同様にして、

$${}_{k-1}C_4 \text{ (通り)}$$

となる。したがって求める得点の期待値は

$$\begin{aligned} \sum_{k=5}^8 k \cdot \frac{{}_{k-1}C_4}{56} &= 5 \cdot \frac{{}_4C_4}{56} + 6 \cdot \frac{{}_5C_4}{56} + 7 \cdot \frac{{}_6C_4}{56} + 8 \cdot \frac{{}_7C_4}{56} \\ &= \frac{5 \cdot 1 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 15 + 8 \cdot 35}{56} \\ &= \frac{5 + 30 + 105 + 280}{56} \\ &= \frac{420}{56} \\ &= \frac{15}{2} \end{aligned}$$

である。

(1)

$x(x-1) \leq 0$ のとき, $0 \leq x \leq 1$ であり, このとき

$$\begin{aligned} f(x) &= -9x(x-1) + 3x + 2 \\ &= -9x^2 + 12x + 2 \\ &= -9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 6 \end{aligned}$$

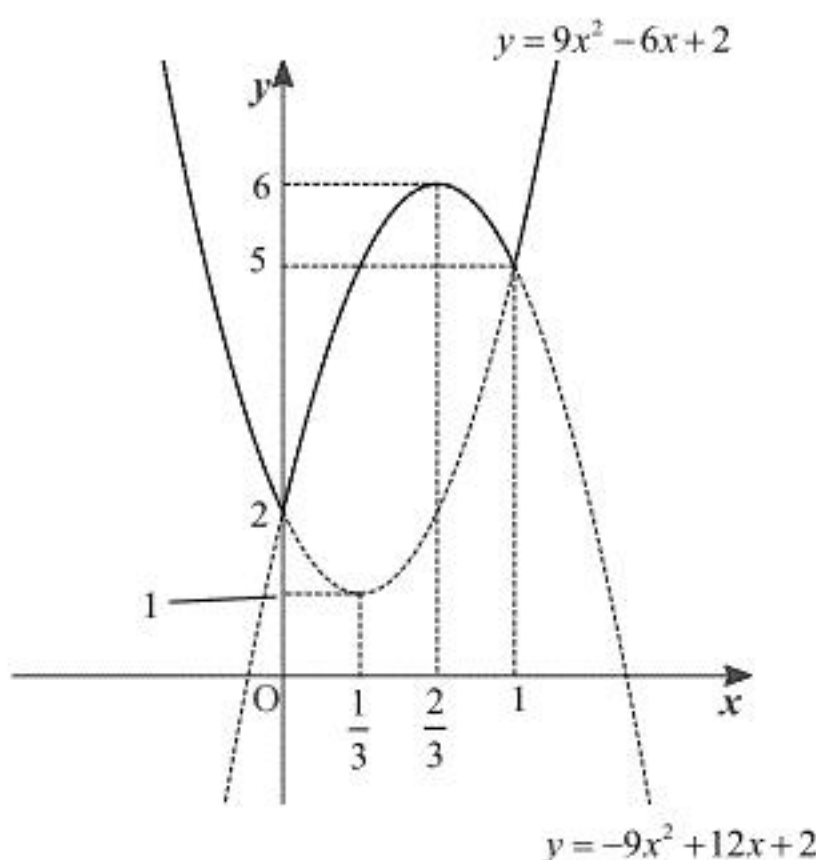
である。また, $x(x-1) > 0$ のとき, $x < 0, 1 < x$ であり, このとき

$$\begin{aligned} f(x) &= 9x(x-1) + 3x + 2 \\ &= 9x^2 - 6x + 2 \\ &= 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 1 \end{aligned}$$

である。よって

$$f(x) = \begin{cases} -9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 6 & (0 \leq x \leq 1) \\ 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 1 & (x < 0, 1 < x) \end{cases}$$

である。したがって $y = f(x)$ のグラフは下図のようになる。



(答) 前図

(2)

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{3}\right) &= 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \\ &= 1 + 2 + 2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

であるから, $-\frac{1}{3} \leq x \leq 0$ における $f(x)$ の最大値は $x = -\frac{1}{3}$ のとき $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 5$ であり, 最小値

は $x = 0$ のとき $f(0) = 2$ である。また, (1) のグラフより, $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大値は,

$x = \frac{2}{3}$ のとき $f\left(\frac{2}{3}\right) = 6$ であり, 最小値は, $x = 0$ のとき $f(0) = 2$ である。したがって, 区間 $-\frac{1}{3}$

$\leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大値は, $x = \frac{2}{3}$ のとき $f\left(\frac{2}{3}\right) = 6$ であり, 最小値は, $x = 0$ のとき

$f(0) = 2$ である。

(答) $x = \frac{2}{3}$ のとき最大値 6

$x = 0$ のとき最小値 2

(3)

(1) より, $-\frac{1}{3} \leq x \leq 0$ のとき $f(x) = -9x^2 + 12x + 2$ であり, $0 \leq x \leq 1$ のとき

$f(x) = 9x^2 - 6x + 2$ であるから,

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{3}}^1 f(x) dx &= \int_{-\frac{1}{3}}^0 (9x^2 - 6x + 2) dx + \int_0^1 (9x^2 - 6x + 2) dx \\ &= \left[3x^3 - 3x^2 + 2x \right]_{-\frac{1}{3}}^0 + \left[-3x^3 + 6x^2 + 2x \right]_0^1 \\ &= -\left(-\frac{1}{9} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right) + (-3 + 6 + 2) \\ &= \frac{55}{9} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{55}{9}$

3

(1)

3点 A, B, C は原点 O を中心とする半径 1 の円周上にあることから,

$$|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = |\overline{OC}| = 1$$

である。与式より

$$\begin{aligned}\overline{OA} + \sqrt{3}\overline{OB} - \overline{OC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \sqrt{3}\overline{OB} - \overline{OC} &= -\overline{OA}\end{aligned}$$

となる。両辺を二乗すると

$$\begin{aligned}|\sqrt{3}\overline{OB} - \overline{OC}|^2 &= |-\overline{OA}|^2 \\ \Leftrightarrow 3 + 1 - 2\sqrt{3}\overline{OB} \cdot \overline{OC} &= 1 \\ \Leftrightarrow \overline{OB} \cdot \overline{OC} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \overline{OB} \cdot \overline{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2)

$\overline{OB} \cdot \overline{OC} = |\overline{OB}| \cdot |\overline{OC}| \cdot \cos \angle BOC$ であるから,

$$\begin{aligned}|\overline{OB}| \cdot |\overline{OC}| \cdot \cos \angle BOC &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow \cos \angle BOC &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となる。 $0 \leq \angle BOC \leq \pi$ より, $\angle BOC = \frac{\pi}{6}$ である。よって $\overline{OB}$ と $\overline{OC}$ のなす角は $\frac{\pi}{6}$ である。

$$\text{(答)} \quad \frac{\pi}{6}$$

(3)

与式より

$$\begin{aligned}\overline{OA} + \sqrt{3}\overline{OB} - \overline{OC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overline{OA} - \overline{OC} &= -\sqrt{3}\overline{OB}\end{aligned}$$

となる。両辺を二乗すると

$$\begin{aligned}|\overline{OA} - \overline{OC}|^2 &= |-\sqrt{3}\overline{OB}|^2 \\ \Leftrightarrow 1 + 1 - 2\overline{OA} \cdot \overline{OC} &= 3 \\ \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OC} &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。よって, (2) と同様にして,

$$\begin{aligned}|\overline{OA}| \cdot |\overline{OC}| \cdot \cos \angle AOC &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \cos \angle AOC &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。 $0 \leq \angle AOC \leq \pi$ より, $\angle AOC = \frac{2\pi}{3}$ である。よって $\overline{OA}$ と $\overline{OC}$ のなす角は $\frac{2\pi}{3}$ である。

$$\text{(答)} \quad \frac{2\pi}{3}$$

(4)

(3) より $\overline{OA} \cdot \overline{OC} = -\frac{1}{2}$ であるから,

$$\begin{aligned}|\overline{AC}|^2 &= |\overline{OC} - \overline{OA}|^2 \\ &= 1 + 1 - 2 \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OC} \\ &= 2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 3\end{aligned}$$

となる。 $|\overline{AC}| > 0$ より, $|\overline{AC}| = \sqrt{3}$ である。同様にして, $\overline{OB} \cdot \overline{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であることから,

$$\begin{aligned}|\overline{BC}|^2 &= |\overline{OC} - \overline{OB}|^2 \\ &= |\overline{OC}|^2 + |\overline{OB}|^2 - 2 \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OC} \\ &= 2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。ところで $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$ は

$$\begin{aligned}\overline{OA} + \sqrt{3}\overline{OB} - \overline{OC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overline{OA} + \sqrt{3}\overline{OB} &= \overline{OC}\end{aligned}$$

より, 両辺を二乗して

$$\begin{aligned}|\overline{OA} + \sqrt{3}\overline{OB}|^2 &= |\overline{OC}|^2 \\ \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{3}\overline{OA} \cdot \overline{OB} + 3 &= 1 \\ \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OB} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となる。したがって $\triangle ABC$ の面積は

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{|\overline{AC}|^2 |\overline{BC}|^2 - (\overline{AC} \cdot \overline{BC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot (2 - \sqrt{3}) - \{(\overline{OC} - \overline{OA}) \cdot (\overline{OC} - \overline{OB})\}^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6 - 3\sqrt{3} - \{|\overline{OC}|^2 - \overline{OA} \cdot \overline{OC} - \overline{OB} \cdot \overline{OC} + \overline{OA} \cdot \overline{OB}\}^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6 - 3\sqrt{3} - \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6 - 3\sqrt{3} - \left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6 - 3\sqrt{3} - \left(\frac{21}{4} - 3\sqrt{3}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad AC = \sqrt{3}, \triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4}$$