

〔解答〕

| ア                     | イ  | ウ | エ | オ                | カ                 |
|-----------------------|----|---|---|------------------|-------------------|
| $\frac{1}{8}\log_3 2$ | 54 | 9 | 2 | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{5}{12}\pi$ |

〔解説〕

(1)

両辺で底を3とする対数をとると、

$$-8a = -\log_3 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{8}\log_3 2$$

が得られる。また、 $3^{-an} < \frac{1}{100}$  において、両辺で底を3とする対数をとると、底が $3 > 1$ である

から、

$$\begin{aligned} 3^{-an} &< \frac{1}{100} \\ \Leftrightarrow -an &< -2\log_3 10 \\ \Leftrightarrow n &> \frac{2\log_3 10}{a} \left( \because a = \frac{1}{8}\log_3 2 > 0 \right) \end{aligned}$$

となる。このとき、 $a$ の値を代入すると、底の変換公式より、

$$\frac{2\log_3 10}{a} = 2\log_3 10 \cdot \frac{8}{\log_3 2} = 16 \cdot \frac{1}{\frac{\log_3 2}{\log_{10} 2}} = \frac{16}{\frac{\log_3 2}{\log_{10} 2}} = \frac{16}{0.3010} = 53.1\dots$$

である。したがって、 $n > 53.1\dots$  より、題意の不等式を満たす整数 $n$ のうち、最小のものは $n = 54$ である。

(2)

与式より、

$$\log_3 \sqrt{b} + \log_b 9 = \frac{1}{2}\log_3 b + 2\log_b 3 = \frac{1}{2}\log_3 b + \frac{2}{\log_3 b}$$

である。このとき、 $b > 1 \Leftrightarrow \log_3 b > 0$  であるから、相加平均・相乗平均の関係より

$$\frac{1}{2}\log_3 b + \frac{2}{\log_3 b} \geq 2\sqrt{\frac{\log_3 b}{2} \cdot \frac{2}{\log_3 b}} = 2$$

が成り立つ。ただし、等号成立条件は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\log_3 b &= \frac{2}{\log_3 b} \\ \Leftrightarrow (\log_3 b)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow \log_3 b &= 2 \quad (\because \log_3 b > 0) \\ \Leftrightarrow b &= 9 \end{aligned}$$

である。

(3)

$\sin \theta + \cos \theta = x$  とおく。このとき、合成公式より  $x = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$  であり、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  である

から、 $1 < x \leq \sqrt{2}$  である。また、 $\sin \theta + \cos \theta = x$  の両辺を2乗すると、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  より、

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta &= x^2 \\ \Leftrightarrow \sin \theta \cos \theta &= \frac{x^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

が得られる。したがって、与式は、 $1 < x \leq \sqrt{2}$  であるから、

$$\begin{aligned} 4(\sin \theta + \cos \theta)(\cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta) + 4\sin \theta \cos \theta &= 3\sin \theta + 3\cos \theta + 1 \\ \Leftrightarrow 4x\left(1 - \frac{x^2 - 1}{2}\right) + 4 \cdot \frac{x^2 - 1}{2} &= 3x + 1 \\ \Leftrightarrow 2x^3 - 2x^2 - 3x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2} \left( \because 2 < \sqrt{6} < 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 1 < \frac{\sqrt{6}}{2} < \sqrt{2} \right) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $x = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$  に代入すると、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi$  より、

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{6}}{2} &= \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \\ \Leftrightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow \theta + \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi \left( \because \frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi \right) \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi \end{aligned}$$

である。

(1)

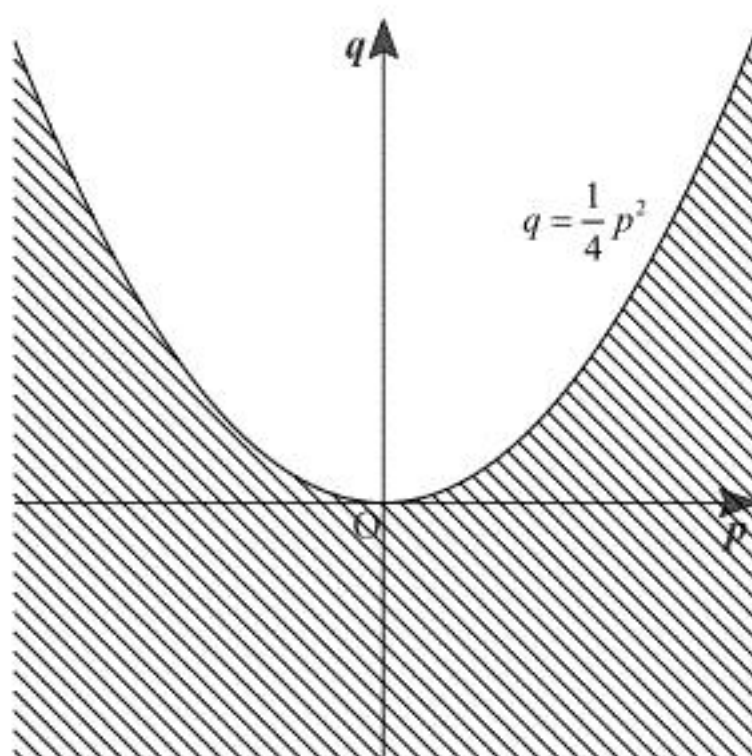
2次方程式  $f(x)=0$  の判別式を  $D$  とすると、2次方程式  $f(x)=0$  が実数解を持つ必要十分条件は、 $D \geq 0$  である。よって、

$$D \geq 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 4q \geq 0$$

$$\Leftrightarrow q \leq \frac{1}{4}p^2$$

である。これを図示すると下図の境界線上を含む斜線部となる。



(答) 前図(境界線は含む)

(2)

$f(1)=1+p+q$  であるから、

$$f(1) \leq k$$

$$\Leftrightarrow 1+p+q \leq k$$

$$\Leftrightarrow q \leq -p+k-1$$

となる。よって、各不等式が表す  $pq$  平面上の領域に注目すると、

「 $f(1) \leq k$  ならば 2次方程式  $f(x)=0$  は実数解を持つ」が真である  $k$  の条件

$$\Leftrightarrow q \leq -p+k-1 \text{ が表す領域が } q \leq \frac{1}{4}p^2 \text{ の表す領域に含まれるための } k \text{ の条件}$$

$$\Leftrightarrow \text{放物線 } q = \frac{1}{4}p^2 \text{ と直線 } q = -p+k-1 \text{ が接するか交点を持たないような } k \text{ の条件}$$

である。2式より共有点の  $p$  座標は

$$\frac{1}{4}p^2 = -p+k-1$$

$$\Leftrightarrow p^2 + 4p - 4k + 4 = 0$$

の実数解である。このとき、放物線と直線が接するか交点を持たないのは、上の式がただ1

つの実数解を持つか、実数解を持たないときである。したがって、2次方程式

$p^2 + 4p - 4k + 4 = 0$  の判別式を  $D'$  とすると、求める必要十分条件は、 $D' \leq 0$  である。よって、 $k$  の条件は、

$$D' \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4 - (-4k + 4) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow k \leq 0$$

となる。

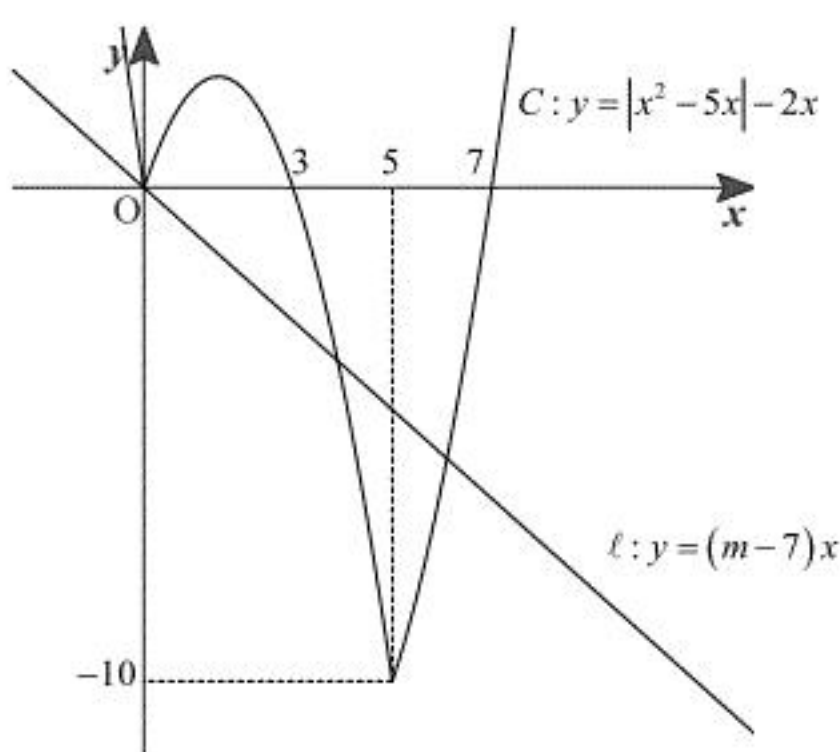
(答)  $k \leq 0$

(1)

$y = |x^2 - 5x| - 2x$  の絶対値を外すと,

$$|x^2 - 5x| - 2x = \begin{cases} -x^2 + 3x & (0 \leq x \leq 5) \\ x^2 - 7x & (x < 0, 5 < x) \end{cases}$$

となる。このとき、 $C$  と  $\ell$  は下図の通りである。



このとき、 $0 \leq x \leq 5$  における共有点の  $x$  座標は、

$$\begin{aligned} -x^2 + 3x &= (m-7)x \\ \Leftrightarrow x\{x - (10-m)\} &= 0 \end{aligned}$$

の実数解が候補であるから、その個数は高々2つである。また、その一方は  $x=0$  であるから、原点以外の共有点の個数は高々1個である。よって、 $0 \leq x \leq 5$  または  $x < 0, 5 < x$  の一方で、原点以外の共有点を2つ持つことはないから、求める条件は両区間で共有点を1つずつ持つ条件である。よって、この2つの式が表す曲線と  $\ell$  の共有点を考えるために、 $C$  の式に注目して場合分けをする。

[1]  $0 \leq x \leq 5$  のとき

$y = -x^2 + 3x$  と  $\ell$  の交点の  $x$  座標は、

$$\begin{aligned} -x^2 + 3x &= (m-7)x \\ \Leftrightarrow x\{x - (10-m)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, 10-m \end{aligned}$$

である。よって、原点以外の共有点をもつのは

$$0 < 10-m \leq 5 \Leftrightarrow 5 \leq m < 10$$

のときである。

[2]  $x < 0, 5 < x$  のとき

$y = x^2 - 7x$  と  $\ell$  の交点の  $x$  座標は、

$$\begin{aligned} x^2 - 7x &= (m-7)x \\ \Leftrightarrow x(x-m) &= 0 \\ \therefore x &= m (\because x < 0, 5 < x) \end{aligned}$$

である。よって、 $m < 0, 5 < m$  のとき、 $x < 0, 5 < x$  で原点以外の共有点  $x=m$  をもつ。

以上[1], [2]より、 $C$  と  $\ell$  が原点以外に2つの共有点をもつのは、 $0 \leq x \leq 5$ 、 $x < 0, 5 < x$  のそれぞれで原点以外の共有点を1つずつ持つ場合であるから、

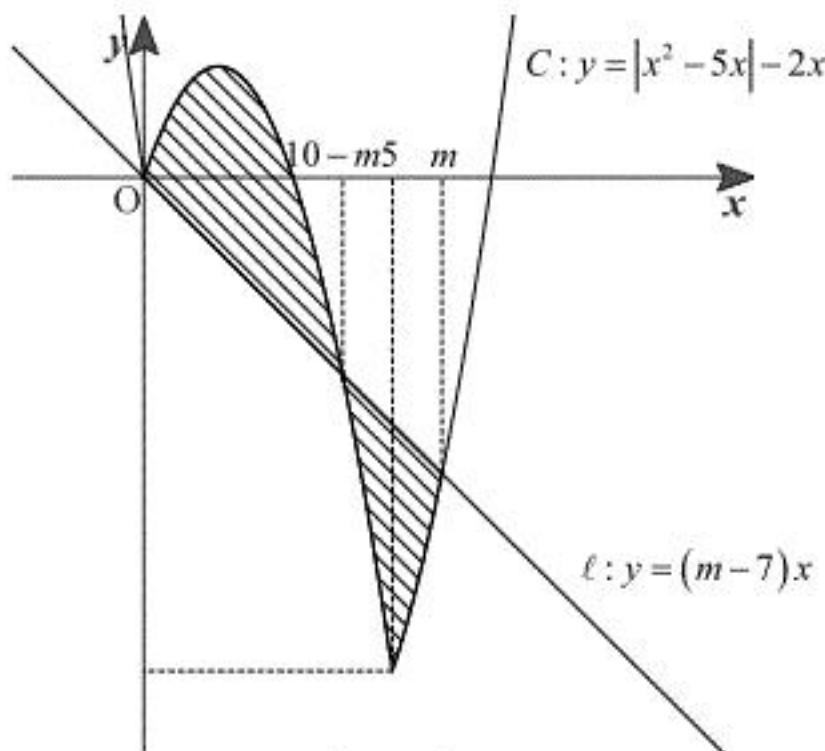
$$\text{「} 5 \leq m < 10 \text{ かつ } m < 0, 5 < m \text{」} \Leftrightarrow 5 < m < 10$$

である。

(答)  $5 < m < 10$

(2)

$5 < m < 10$  のとき、 $C$  と  $\ell$  で囲まれた領域は下図の境界線を含む斜線部である。



$0 \leq x \leq 10-m$  を満たす領域の面積を  $S_1$ 、 $10-m \leq x \leq m$  を満たす領域の面積を  $S_2$  とすると、求める  $m$  は  $S_1 = S_2$  となる  $m$  である。このとき、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{10-m} \{(-x^2 + 3x) - (m-7)x\} dx \\ &= -\int_0^{10-m} x\{x - (10-m)\} dx \\ &= \frac{1}{6}(10-m)^3 \\ S_2 &= \int_{10-m}^5 \{(m-7)x - (-x^2 + 3x)\} dx + \int_5^m \{(m-7)x - (x^2 - 7x)\} dx \\ &= \int_{10-m}^5 \{x^2 - (10-m)x\} dx + \int_5^m (-x^2 + mx) dx \\ &= \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(10-m)x^2 \right]_{10-m}^5 + \left[ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}mx^2 \right]_5^m \\ &= \left\{ \frac{125}{3} - \frac{25}{2}(10-m) \right\} - \left\{ \frac{1}{3}(10-m)^3 - \frac{1}{2}(10-m)^3 \right\} + \left( -\frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^3 \right) - \left( -\frac{125}{3} + \frac{25}{2}m \right) \\ &= \frac{1}{6}m^3 + \frac{1}{6}(10-m)^3 - \frac{125}{3} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} S_1 &= S_2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6}(10-m)^3 &= \frac{1}{6}m^3 + \frac{1}{6}(10-m)^3 - \frac{125}{3} \\ \Leftrightarrow m^3 &= 250 \\ \Leftrightarrow m &= 5\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

となる。 $1 < \sqrt[3]{2} < 2 \Leftrightarrow 5 < 5\sqrt[3]{2} < 10$  であるから、 $5 < m < 10$  を満たすので、求める  $m$  は

$m = 5\sqrt[3]{2}$  である。

(答)  $m = 5\sqrt[3]{2}$