

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ		
	－	3	－	1	1	3	1		
(2)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ		
	－	3	2	1	3	3	3		
(3)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
	1	6	5	2	－	1	2	－	2
(4)	ア	イ							
	2	1							

【解説】

(1)1.

与式を変形すると

$$\begin{aligned} px-(p+1)y+2p-1&=0 \\ \Leftrightarrow (x-y+2)p-y-1&=0 \end{aligned}$$

となる。これが p の値に関わらず成り立つとき、

$$\begin{cases} x-y+2=0 \\ -y-1=0 \end{cases}$$

$$\therefore (x,y)=(-3,-1)$$

である。よって直線 l は p の値に関わらず、定点 $(-3,-1)$ を通る。

2.

直線 l と x 軸との交点は、直線 l の方程式において $y=0$ を代入した式

$$px+2p-1=0 \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

の解である。 $p=0$ のとき①は成立しないから、直線 l と x 軸が交わる時、 $p \neq 0$ である。このとき、①の解は、

$$x=\frac{1-2p}{p}$$

となる。よって、 $p \neq 0$ の下で、これが -1 以上 1 以下となるような p の値を求めればよいから、

$$-1 \leq \frac{1-2p}{p} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{p}-2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{p} \leq 3$$

よって $\frac{1}{p} > 0$ となるから $p > 0$ である。したがって

$$\frac{1}{3} \leq p \leq 1$$

である。 $p \neq 0$ と合わせて、求める条件は

$$\frac{1}{3} \leq p \leq 1$$

となる。

(2)

関数 $f(x)$ の導関数は、

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。関数 $f(x)$ が極値をもつとき、②は異なる2つの実数解をもつから、それを

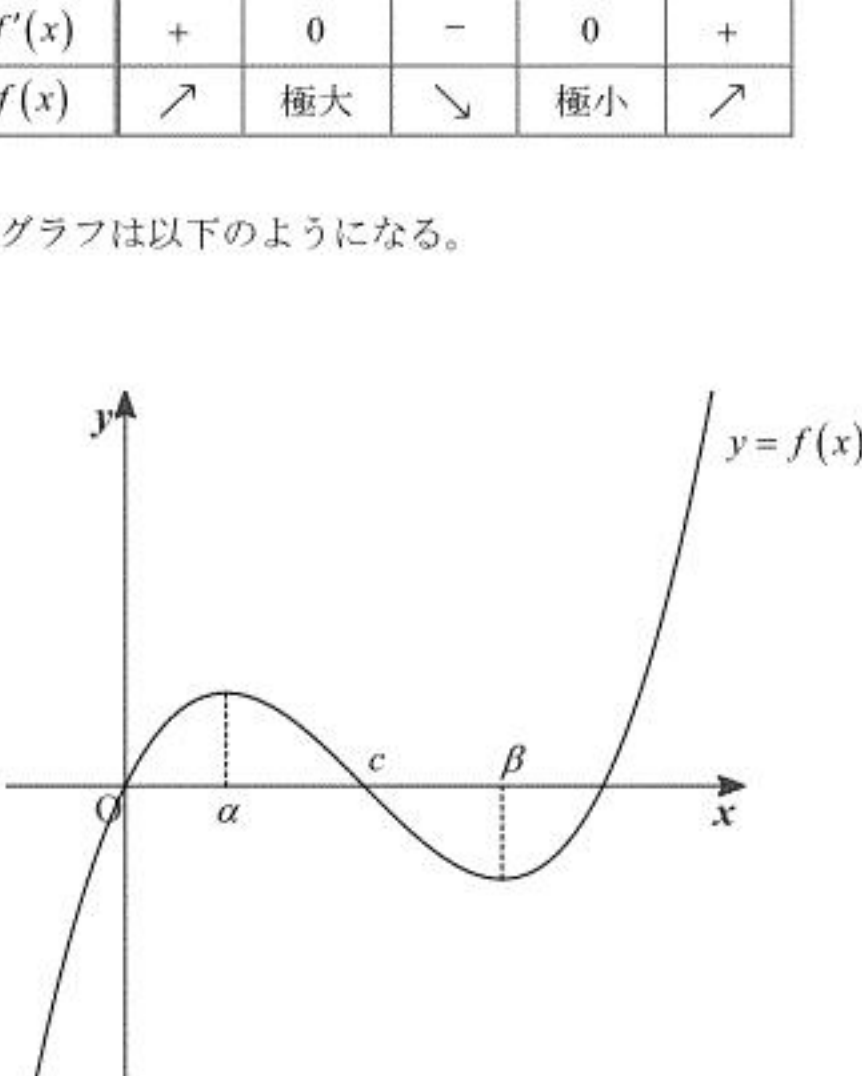
α, β ($\alpha < \beta$) とおくと②は

$$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$$

と表せる。したがって、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

上表より、 $y=f(x)$ のグラフは以下のようになる。



$f(x)$ は $x=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ で極大値をとるから、上図より、

$$\alpha=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

である。 $y=f(x)$ は点 $(c,0)$ に関して点対称だから点 $(c,0)$ は2点 $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta))$ の中

点である。したがって

$$c=\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つ。また、 $(c, f(c))$ は曲線 $y=f(x)$ 上の点であるから、点 $(c,0)$ に関し点対称な点

$(c, -f(c))$ も曲線 $y=f(x)$ 上の点になる。したがって、

$$f(c)=-f(c) \Leftrightarrow f(c)=0$$

が成り立つ。さらに、 $f(0)=0$ より $(0,0)$ は曲線 $y=f(x)$ 上の点であるから、点 $(c,0)$ に関し点対称な点 $(2c,0)$ も曲線 $y=f(x)$ 上の点になる。以上より、 $0, c, 2c$ は $f(x)=0$ の解である。

$\alpha < \beta$ と③より $0 < \frac{3-\sqrt{3}}{3} = \alpha < c$ であるから、これらはすべて異なる。したがって、

$$f(x)=x(x-c)(x-2c)$$

$$=x(x-3cx+2c^2)$$

であり、 $f(x)=x(x^2+ax+b)$ と係数を比較して、

$$a=-3c, b=2c^2 \qquad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

となる。すると、

$$f'(x)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-6cx+2c^2=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3c \pm \sqrt{9c^2-6c^2}}{3}$$

$$\therefore x=\frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}c \qquad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

となる。このうち小さい方が $\alpha=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ であるから、 $c > 0$ より、

$$\frac{3-\sqrt{3}}{3}c=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore c=1$$

と求まる。これを④に代入して、

$$a=-3$$

$$b=2$$

となる。また、 $f(x)$ が極小値をとるのは、⑤より、

$$x=\frac{3+\sqrt{3}}{3}c=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

となる。

(3)

与式を変形し

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\cos^2 x + 2\sin x \\ &= -2\sin^2 x + 2\sin x + 2 \\ &= -2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

となる。 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で $-1 \leq \sin x \leq 1$ であるから、 $f(x)$ は $\sin x = \frac{1}{2}$ 、つまり $x = \frac{\pi}{6}$ の

とき最大値 $\frac{5}{2}$ をとり、 $\sin x = -1$ 、つまり $x = -\frac{\pi}{2}$ のとき最小値 -2 をとる。

(4)

c_1 と x 軸との交点の x 座標は

$$-x^2+2x=0$$

$$\Leftrightarrow -x(x-2)=0$$

$$\therefore x=0, 2$$

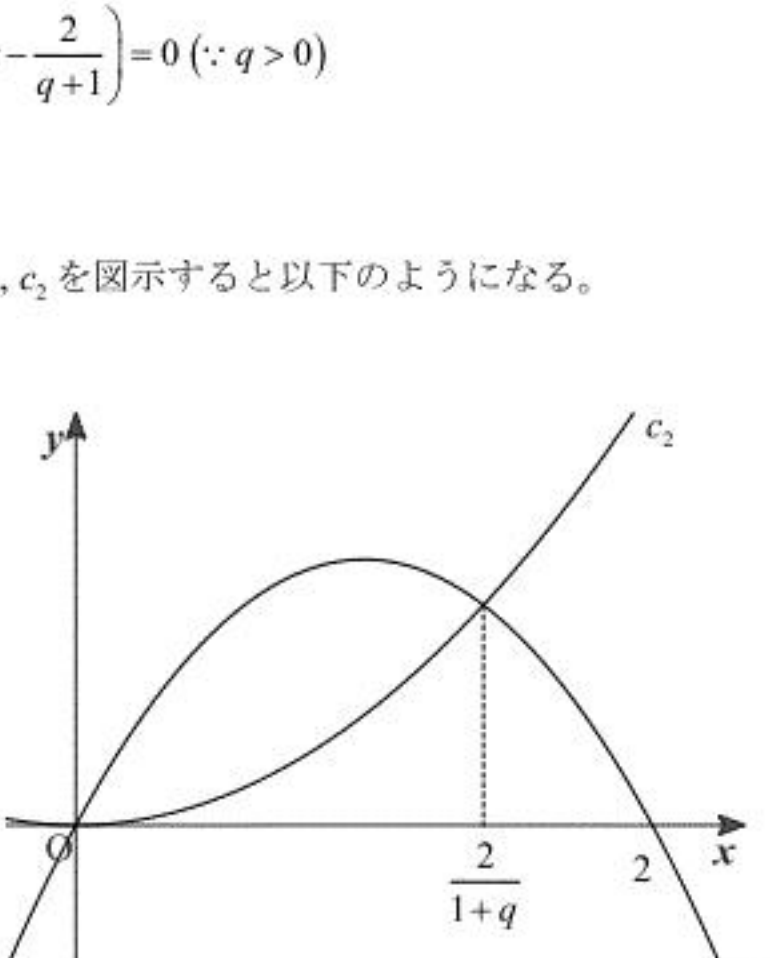
である。さらに、 c_1 と c_2 の交点の x 座標は

$$-x^2+2x-qx^2=0$$

$$\Leftrightarrow -(1+q)x\left(x-\frac{2}{q+1}\right)=0 \left(\because q>0\right)$$

$$\therefore x=0, \frac{2}{q+1}$$

となる。したがって c_1, c_2 を図示すると以下のようになる。



図より、 c_1 と x 軸とが囲む部分の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^2 (-x^2+2x) dx &= -\int_0^2 x(x-2) dx \\ &= \frac{1}{6}(2-0)^3 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。よって c_1 と c_2 とが囲む図形の面積は $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ となればよいから

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2}{q+1}} (-x^2+2x-qx^2) dx &= \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow -(q+1) \int_0^{\frac{2}{q+1}} x \left(x-\frac{2}{q+1}\right) dx &= \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6}(q+1) \left(\frac{2}{q+1}-0\right)^3 &= \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(q+1)^2} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow (q+1)^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow q+1 &= \sqrt{2} \left(\because q+1>0\right) \\ \therefore q &= \sqrt{2}-1 \end{aligned}$$

となる。

Ⅱ

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ			
	－	4	9	1	3	2	7			
(2)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
	1	2	0	1	1	9	1	2	3	9
(3)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ				
	3	3	3	3	7	2				

【解説】

(1)

$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}$ の両辺を 2 乗し変形すると

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{4}{9}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha &= (\sin \alpha + \cos \alpha) (\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{9} \right) \\ &= \frac{13}{27} \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

2 倍角の定理より

$$\tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{5}{12}$$

$$\tan 4\beta = \frac{2 \tan 2\beta}{1 - \tan^2 2\beta} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}$$

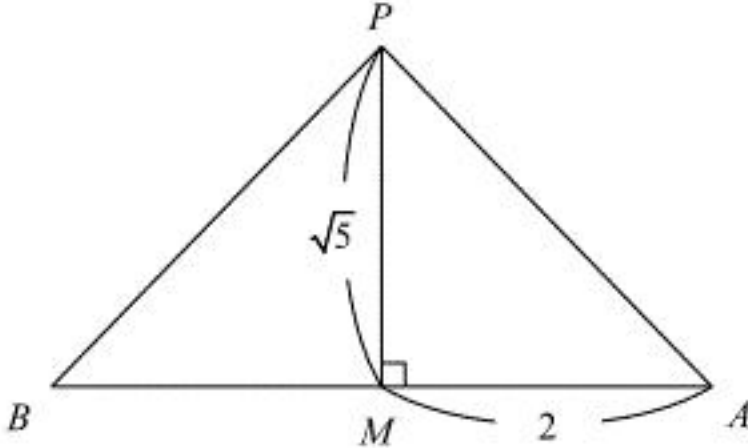
となる。加法定理より

$$\tan \left(4\beta - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan 4\beta - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan 4\beta \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}$$

と求まる。

(3)1.

線分 AB の中点を M とする。このとき 3 点 A, B, P を通る平面による直円錐の断面図は以下のようになる。



図より、 $\triangle PMA$ において三平方の定理を用いて

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \sqrt{5+4} \\ &= 3 \end{aligned}$$

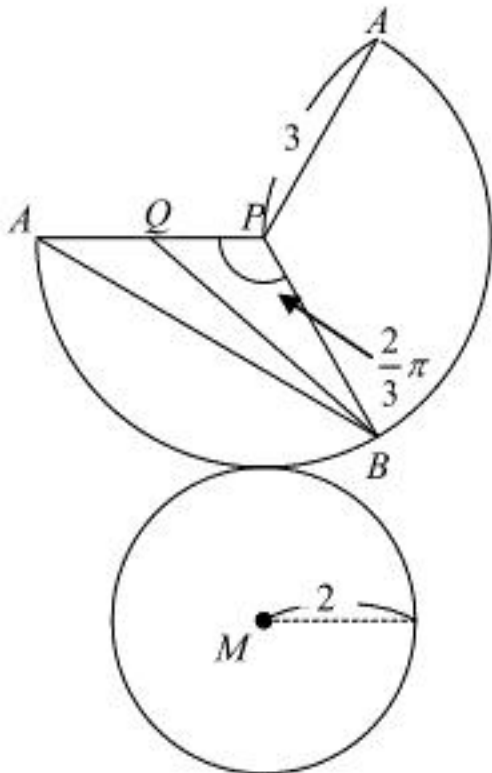
となる。

2.

直円錐の展開図において、直円錐の側面が作る扇形の中心角は

$$2\pi \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{AP}} = \frac{4}{3}\pi$$

となる。したがって直円錐の展開図は以下のようになる。



側面上で A から B に至る最短距離は上図における $\overline{AB}$ である。よって $\triangle ABP$ に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 - 2\overline{PA} \cdot \overline{PB} \cos \angle APB \\ &= 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cos \frac{2}{3}\pi \\ &= 27 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AB} = 3\sqrt{3} \left(\because \overline{AB} > 0 \right)$$

と求まる。

3.

側面上で B から Q へ至る最短距離は 2. の図における $\overline{BQ}$ である。よって $\triangle QBP$ に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned} \overline{BQ}^2 &= \overline{PQ}^2 + \overline{PB}^2 - 2\overline{PQ} \cdot \overline{PB} \cos \angle QPB \\ &= \frac{9}{4} + 9 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 \cos \frac{2}{3}\pi \\ &= \frac{63}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{BQ} = \frac{3\sqrt{7}}{2} \left(\because \overline{BQ} > 0 \right)$$

と求まる。

Ⅲ

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ						
	－	1	1	1	8	1						
(2)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	4	5	3	5	1	5	2	5	1	5	3	5
(3)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	
	2	1	3	1	4	4	－	1	1	－	2	

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= a^3 - {}_3C_1a^2b + {}_3C_2ab^2 - b^3 \\ (b-c)^4 &= b^4 - {}_4C_1b^3c + {}_4C_2b^2c^2 - {}_4C_3bc^3 + c^4 \\ (c-a)^5 &= c^5 - {}_5C_1c^4a + {}_5C_2c^3a^2 - {}_5C_3c^2a^3 + {}_5C_4ca^4 - a^5\end{aligned}$$

となる。 $(a-b)^3(b-c)^4(c-a)^5$ を展開すると、各因子から選んだ文字に従って項が現れる。

a^8b^4 の項は、 $(a-b)^3$ から a^3 の項、 $(b-c)^4$ から b^4 の項、 $(c-a)^5$ から a^5 の項を選んだときに現れるから、その係数は、

$$1\cdot 1\cdot (-1)=-1$$

である。 a^5b^6c の項は、

$$[1] \quad (a-b)^3 \text{ から } b^3 \text{ の項, } (b-c)^4 \text{ から } b^3c \text{ の項, } (c-a)^5 \text{ から } a^5 \text{ の項を選んだとき}$$

$$[2] \quad (a-b)^3 \text{ から } ab^2 \text{ の項, } (b-c)^4 \text{ から } b^4 \text{ の項, } (c-a)^5 \text{ から } ca^4 \text{ の項を選んだとき}$$

のいずれかで現れる。よって、その係数は、

$$\begin{aligned} &(-1)\cdot (-{}_4C_3)\cdot (-1) + {}_3C_2\cdot 1\cdot {}_5C_4 \\ &= -4+15 \\ &= 11 \end{aligned}$$

である。 $a^3b^4c^5$ の項は

$$[1] \quad (a-b)^3 \text{ から } a^3 \text{ の項, } (b-c)^4 \text{ から } b^4 \text{ の項, } (c-a)^5 \text{ から } c^5 \text{ を選んだとき}$$

$$[2] \quad (a-b)^3 \text{ から } a^2b \text{ の項, } (b-c)^4 \text{ から } b^3c \text{ の項, } (c-a)^5 \text{ から } c^4a \text{ の項を選んだとき}$$

$$[3] \quad (a-b)^3 \text{ から } ab^2 \text{ の項, } (b-c)^4 \text{ から } b^2c^2 \text{ の項, } (c-a)^5 \text{ から } c^3a^2 \text{ の項を選んだとき}$$

$$[4] \quad (a-b)^3 \text{ から } b^3 \text{ の項, } (b-c)^4 \text{ から } bc^3 \text{ の項, } (c-a)^5 \text{ から } c^2a^3 \text{ の項を選んだとき}$$

のいずれかで現れる。よって、その係数は、

$$\begin{aligned} &1\cdot 1\cdot 1+(-{}_3C_1)\cdot (-{}_4C_1)\cdot (-{}_5C_1) + {}_3C_2\cdot {}_4C_2\cdot {}_5C_2 + (-1)\cdot (-{}_4C_3)\cdot (-{}_5C_3) \\ &= 1+(-60)+180+(-40) \\ &= 81 \end{aligned}$$

となる。

(2)1.

$$\begin{cases} \vec{x}=\vec{a}+2\vec{b} \\ \vec{y}=2\vec{a}-\vec{b} \end{cases}$$

とすると、

$$\begin{cases} \vec{a}=\frac{1}{5}(\vec{x}+2\vec{y}) \\ \vec{b}=\frac{1}{5}(2\vec{x}-\vec{y}) \end{cases}$$

と表せる。 $|\vec{a}+2\vec{b}|=1, |2\vec{a}-\vec{b}|=1$ より、 $|\vec{x}|=1, |\vec{y}|=1$ であり、

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\left|\frac{1}{5}(3\vec{x}+\vec{y})\right|$$

の最大値を求めればよい。 $\vec{x}, \vec{y}$ のなす角を θ ($0\leq \theta\leq \pi$)とすると、 $\vec{x}\cdot \vec{y}=|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta=\cos\theta$ で

あるから、

$$\begin{aligned} |\vec{a}+\vec{b}|^2 &= \frac{1}{25}|3\vec{x}+\vec{y}|^2 \\ &= \frac{1}{25}\left(9|\vec{x}|^2+6\vec{x}\cdot \vec{y}+|\vec{y}|^2\right) \\ &= \frac{1}{25}(10+6\cos\theta) \end{aligned}$$

となる。 $-1\leq \cos\theta\leq 1$ となるから $|\vec{a}+\vec{b}|$ は、 $\cos\theta=1$ のとき最大値

$$\sqrt{\frac{1}{25}(10+6)}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

をとる。このとき、 $\theta=0$ であるから、 $\vec{x}, \vec{y}$ は平行なベクトルである。よって $|\vec{x}|=|\vec{y}|=1$ であ

るから、 $\vec{x}=\vec{y}$ となり、

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{1}{5}(\vec{x}+2\vec{y})=\frac{3}{5}\vec{x} \\ \therefore |\vec{a}| &= \frac{3}{5} \\ \vec{b} &= \frac{1}{5}(2\vec{x}-\vec{y})=\frac{1}{5}\vec{x} \\ \therefore |\vec{b}| &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

となる。

2.

1.と同様にして、 $|\vec{a}+\vec{b}|$ は、 $\cos\theta=-1$ のとき最小値

$$\sqrt{\frac{1}{25}(10-6)}=\sqrt{\frac{4}{25}}=\frac{2}{5}$$

をとる。このとき、 $\theta=\pi$ であるから、 $\vec{x}, \vec{y}$ は平行なベクトルである。よって $|\vec{x}|=|\vec{y}|=1$ であ

るから、 $\vec{y}=-\vec{x}$ となり、

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{1}{5}(\vec{x}+2\vec{y})=-\frac{1}{5}\vec{x} \\ \therefore |\vec{a}| &= \frac{1}{5} \\ \vec{b} &= \frac{1}{5}(2\vec{x}-\vec{y})=\frac{3}{5}\vec{x} \\ \therefore |\vec{b}| &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

となる。

(3)1.

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

とおく。

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}=1 \\ a_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{5}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。一方、 $\alpha+\beta=1, \alpha\beta=-1$ より、解と係数の関係から、 α, β は方程式 $x^2-x-1=0$ の解である。したがって、

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \alpha+1 \\ \beta^2 &= \beta+1 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、0以上の整数 n に対して、

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n\cdot \alpha^2+\beta^n\cdot \beta^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\{\alpha^n\cdot (\alpha+1)+\beta^n\cdot (\beta+1)\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})+\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n+\beta^n) \\ &= a_{n+1}+a_n \end{aligned}$$

となる。すなわち、数列 $\{a_n\}$ ($n\geq 0$)は漸化式 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ を満たし $a_1=1, a_2=1$ となる数列である。よって a_3 から順に求めていくと

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2+a_1=2 \\ a_4 &= a_3+a_2=3 \\ a_5 &= a_4+a_3=5 \\ a_6 &= a_5+a_4=8 \\ a_7 &= a_6+a_5=13 \\ a_8 &= a_7+a_6=21 \\ a_9 &= a_8+a_7=34 \\ a_{10} &= a_9+a_8=55 \\ a_{11} &= a_{10}+a_9=89 \\ a_{12} &= a_{11}+a_{10}=144 \end{aligned}$$

となる。よって、 $a_3=2, a_7=13, a_{12}=144$ である。

2.

$$\gamma=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \delta=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

とおくと、

$$\gamma^2=\frac{1-3+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=-\delta$$

$$\gamma^3=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\frac{-4}{4}=-1$$

である。同様に、 $\delta^2=-\gamma, \delta^3=-1$ である。したがって、

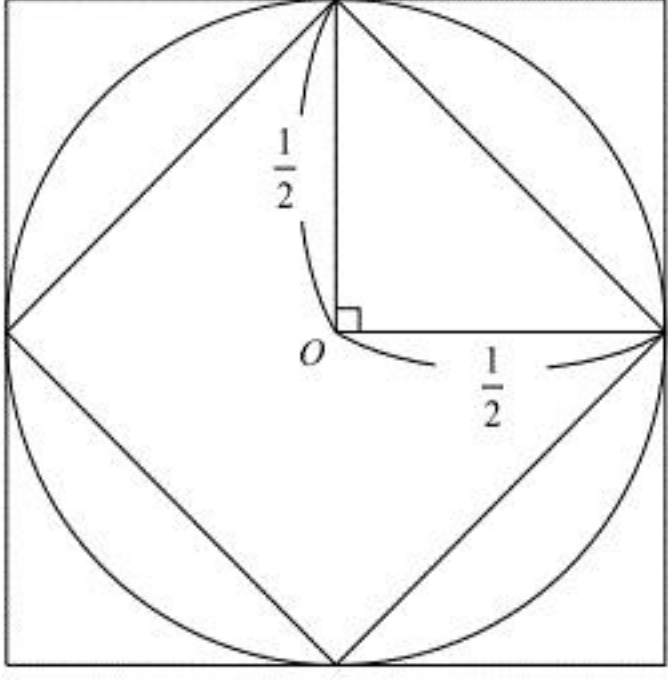
$$\begin{aligned} b_2 &= \gamma^2+\delta^2=-\delta-\gamma=-1 \\ b_7 &= \gamma^7+\delta^7=(-1)^2\gamma+(-1)^2\delta=1 \\ b_{15} &= \gamma^{15}+\delta^{15}=(-1)^5+(-1)^5=-2 \end{aligned}$$

である。

IV

(1)

直径1の円の中心を O とし、この円と円に内接する正方形と外接する正方形を図示すると以下のようになる。



図より、円に内接する正方形の一辺の長さは $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ となる。よって

$$a_0 = \frac{1}{4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

となる。また、図より、円に外接する正方形の一辺の長さは1となる。したがって

$$b_0 = \frac{1}{4}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad a_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}, b_0 = \frac{1}{4}$$

(2)

(1)の結果より $0 < b_0 < a_0$ であるから

$$\frac{b_0}{2} + \frac{b_0}{2} < \frac{a_0}{2} + \frac{b_0}{2} < \frac{a_0}{2} + \frac{a_0}{2}$$

$$\therefore b_0 < b_1 < a_0$$

である。さらに $0 < b_1 < a_0$ より、

$$\sqrt{b_1} \cdot \sqrt{b_1} < \sqrt{a_0} \cdot \sqrt{b_1} < \sqrt{a_0} \cdot \sqrt{a_0}$$

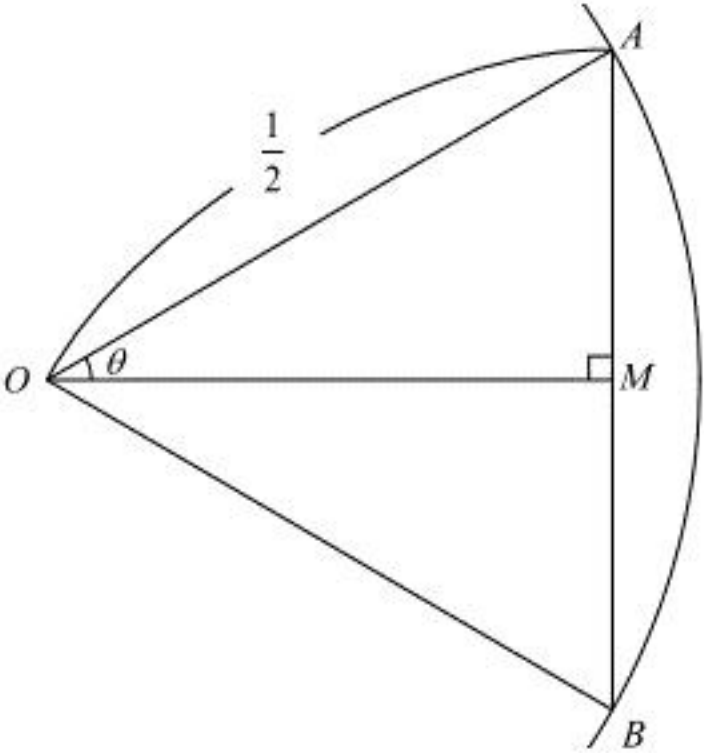
$$\therefore b_1 < a_1 < a_0$$

である。以上より、 $b_0 < b_1 < a_1 < a_0$ が示された。

(証明終)

(3)

円に内接する正 n 角形の隣り合う頂点の一組を A, B 、円に外接する正 n 角形の隣り合う頂点の一組を C, D とおく。また AB の中点を M とする。このとき $\triangle AOB$ と円の一部を図示すると以下のようになる。



上図より

$$AB = 2 \cdot AM$$

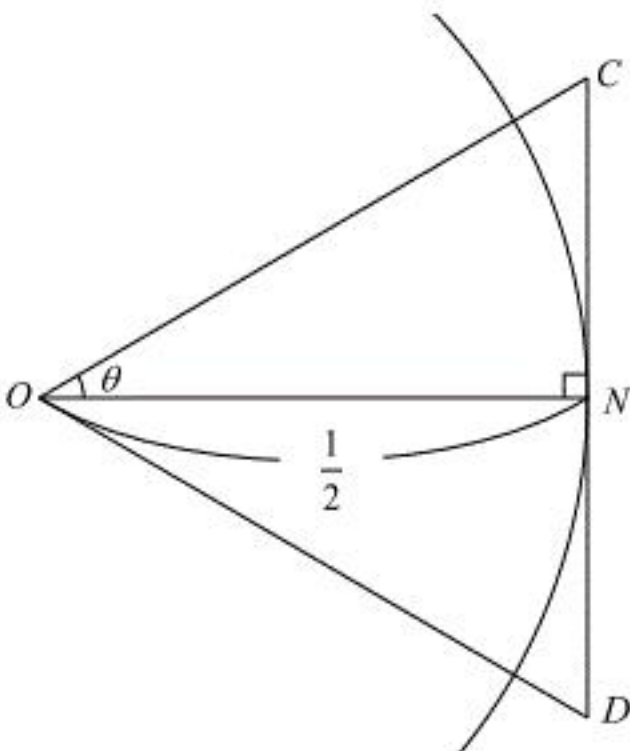
$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \sin \theta$$

$$= \sin \theta$$

となる。 AB は円に内接する正 n 角形の一辺の長さを表すから

$$a = \frac{1}{n \sin \theta}$$

となる。同様に CD の中点を N として、 $\triangle COD$ と円の一部を図示すると以下のようになる。



上図より

$$DC = 2 \cdot \frac{1}{2} \tan \theta$$

となる。 DC は円に外接する正 n 角形の一辺の長さを表すから

$$b = \frac{1}{n \tan \theta}$$

となる。よって題意が示された。

(証明終)

(4)

(3)の結果より

$$b' = \frac{a+b}{2}$$

$$= \frac{1}{2n \sin \theta} + \frac{1}{2n \tan \theta}$$

$$= \frac{1 + \cos \theta}{2n \sin \theta}$$

$$= \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4n \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{1}{2n \tan \frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{1}{2n \tan \theta'}$$

となり、 $\theta' = \frac{\pi}{2n}$ より、 b' は円に外接する正 $2n$ 角形の周の逆数である。また、

$$a' = \sqrt{ab'}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2n^2 \sin \theta \tan \frac{\theta}{2}}}$$

$$= \frac{1}{n \sqrt{4 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \tan \frac{\theta}{2}}}$$

$$= \frac{1}{n \sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2n \sin \frac{\theta}{2}} \left(\because \sin \frac{\theta}{2} > 0 \right)$$

$$= \frac{1}{2n \sin \theta'}$$

となる。 $\theta' = \frac{\pi}{2n}$ より、 a' は円に内接する正 $2n$ 角形の周の逆数である。

(証明終)