

〔解答〕

(1)	1	2	3	
	2	7	2	
(2)	4	5	6	7
	3	3	1	6

〔解説〕

(1)

 n の範囲に注意すると,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=2}^{10} \left(\frac{n}{3} - \frac{1}{2} \right) &= \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{n}{3} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 - \frac{1}{2} \cdot 10 + \frac{1}{6} \\
 &= \frac{27}{2}
 \end{aligned}$$

となる。

(2)

 n の範囲に注意して, 式を変形すると,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=3}^8 \left(1 - \frac{16}{2^n} \right) &= \sum_{n=1}^8 \left\{ 1 - 16 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\} - \left(1 - \frac{16}{2} \right) - \left(1 - \frac{16}{4} \right) \\
 &= 8 - \frac{16 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^8 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} + 10 \\
 &= 18 - 16 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^8 \right\} \\
 &= 2 + 16 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^8 \\
 &= 2 + \frac{1}{2^4} \\
 &= \frac{33}{16}
 \end{aligned}$$

となる。

Ⅱ

〔解答〕

(1)	8	9	
	1	9	
(2)	1 0	1 1	
	2	9	
(3)	1 2	1 3	1 4
	5	1	4

〔解説〕

(1)

3桁の数 x のうち、下1桁が同じものをまとめて1つの事象と考えると全事象は9通りであり、これらは同様に確からしく起こる。 x が5で割り切れるための必要十分条件は $c=5$ であるから、求める確率は、

$$\frac{1}{9}$$

である。

(2)

3桁の数 x のうち、下2桁が同じものをまとめて1つの事象と考えると全事象は

$$9 \cdot 8 = 72 \text{ (通り)}$$

であり、これらは同様に確からしく起こる。 x が4で割り切れるための必要十分条件は $10b+c$ が4の倍数となることであり、 $10b+c$ が4の倍数となる (b, c) の組み合わせは、

$$(1, 2), (1, 6), (2, 4), (2, 8), (3, 2), (3, 6), (4, 8), (5, 2), (5, 6), (6, 4), (6, 8) \\ (7, 2), (7, 6), (8, 4), (9, 2), (9, 6)$$

の16通りである。よって、求める確率は

$$\frac{16}{72} = \frac{2}{9}$$

である。

(3)

引いたカードの種類が同じものをまとめて1つの事象と考えると全事象は

$${}_9C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \text{ (通り)}$$

であり、これらは同様に確からしく起こる。また、 x が3で割り切れるための必要十分条件は $a+b+c$ が3の倍数となることである。 $a+b+c$ が3の倍数となる (a, b, c) の組み合わせは、

$$(1, 2, 3), (1, 2, 6), (1, 2, 9), (1, 3, 5), (1, 3, 8), (1, 4, 7), (1, 5, 6) \\ (1, 5, 9), (1, 6, 8), (1, 8, 9) \\ (2, 3, 4), (2, 3, 7), (2, 4, 6), (2, 4, 9), (2, 5, 8), (2, 6, 7), (2, 7, 9) \\ (3, 4, 5), (3, 4, 8), (3, 5, 7), (3, 6, 9), (3, 7, 8) \\ (4, 5, 6), (4, 5, 9), (4, 6, 8), (4, 8, 9) \\ (5, 6, 7), (5, 7, 9) \\ (6, 7, 8) \\ (7, 8, 9)$$

の30通りであるから、求める確率は、

$$\frac{30}{84} = \frac{5}{14}$$

である。

Ⅲ

〔解答〕

(1)		1 5	1 6	1 7	1 8	1 9	2 0
		1	5	－	1	6	5
(2)	(i)	2 1	2 2				
		3	2				
	(ii)	2 3	2 4	2 5	2 6		
		1	0	2	4		

〔解説〕

(1)

問題文より，

$$\begin{aligned} f(8) &= -\frac{13}{5} \\ \Leftrightarrow a \log_2 8 + b &= -\frac{13}{5} \\ \Leftrightarrow 3a + b + \frac{13}{5} &= 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned} f(128) &= -\frac{9}{5} \\ \Leftrightarrow a \log_2 128 + b &= -\frac{9}{5} \\ \Leftrightarrow 7a + b + \frac{9}{5} &= 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。①，②より，

$$a = \frac{1}{5}, b = \frac{-16}{5}$$

である。

(2)(i)

(1)の結果より，

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= 1 \\ \Leftrightarrow (a \log_2 x + b) - (a \log_2 y + b) &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{5} \log_2 \frac{x}{y} &= 1 \\ \Leftrightarrow \log_2 \frac{x}{y} &= 5 \\ \Leftrightarrow \frac{x}{y} &= 2^5 \\ \therefore \frac{x}{y} &= 32 \end{aligned}$$

である。

(ii)

(1)の結果より，

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= 2 \\ \Leftrightarrow (a \log_2 x + b) - (a \log_2 y + b) &= 2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{5} \log_2 \frac{x}{y} &= 2 \\ \Leftrightarrow \log_2 \frac{x}{y} &= 10 \\ \Leftrightarrow \frac{x}{y} &= 2^{10} \\ \therefore \frac{x}{y} &= 1024 \end{aligned}$$

である。

IV

【解答】

(1)	2 7	2 8			
	4	3			
(2)	2 9	3 0	3 1	3 2	3 3
	8	3	1	6	9
(3)	3 4	3 5			
	2	3			
(4)	3 6	3 7	3 8	3 9	
	1	6	8	1	

【解説】

(1)

$y = x^2$ のとき $y' = 2x$ であるから、放物線 C_1 上の点 (t, t^2) における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y - t^2 &= 2t(x - t) \\ \Leftrightarrow y &= 2tx - t^2 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。①と放物線 C_2 の方程式から、 y を消去した2次方程式、

$$\begin{aligned} 2tx - t^2 &= -2x^2 + 4x - 2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + (2t - 4)x + 2 - t^2 &= 0 \end{aligned}$$

の判別式を D とすると、①と放物線 C_2 が接するとき、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - 2)^2 - 2 \cdot (2 - t^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3t^2 - 4t &= 0 \\ \Leftrightarrow t(3t - 4) &= 0 \\ \therefore t &= 0, \frac{4}{3} \end{aligned}$$

である。①より、放物線 C_1 と放物線 C_2 の両方に接する接線は、

$$\begin{aligned} y &= 0 \quad (x \text{ 軸}) \\ y &= \frac{8}{3}x - \frac{16}{9} \quad (\text{直線 } l) \end{aligned}$$

であり、放物線 C_1 と直線 l の接点の x 座標は $\frac{4}{3}$ である。

(2)

(1)の結果より、直線 l の方程式は、

$$y = \frac{8}{3}x - \frac{16}{9}$$

である。

(3)

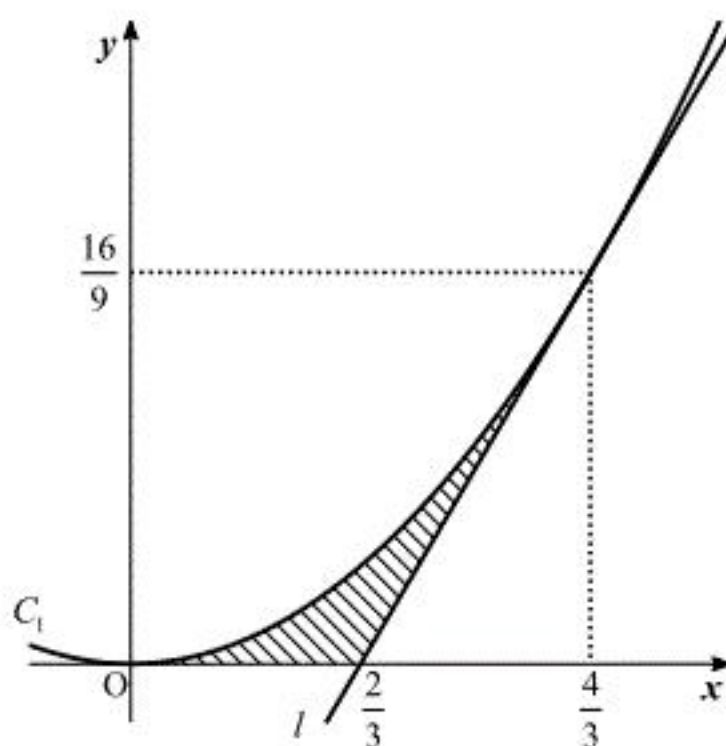
(2)の結果より、直線 l の方程式に $y = 0$ を代入することで、直線 l と x 軸の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{8}{3}x - \frac{16}{9} \\ \therefore x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

と求められる。

(4)

以下に求める面積を斜線部で示す。



上図より、求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{4}{3}} x^2 dx - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \right) \cdot \frac{16}{9} \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\frac{4}{3}} - \frac{16}{27} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^3 - \frac{16}{27} \\ &= \frac{16}{81} \end{aligned}$$

である。