

【解答】

(1)	①	②	③	④
	4	2	7	2
(2)	⑤	⑥	⑦	
	0	1	8	

【解説】

(1)

区間 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において、 $\sin \theta$ は単調増加であり $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ である。すなわち、 θ の値

と $\sin \theta$ の値は 1 対 1 対応している。そのため、 $x = \sin \theta$ とおくとき、①の解の個数は x に関する方程式 $x^2(x+1) = k$ の解のうち $-1 \leq x \leq 1$ を満たす解の個数と一致する。また、

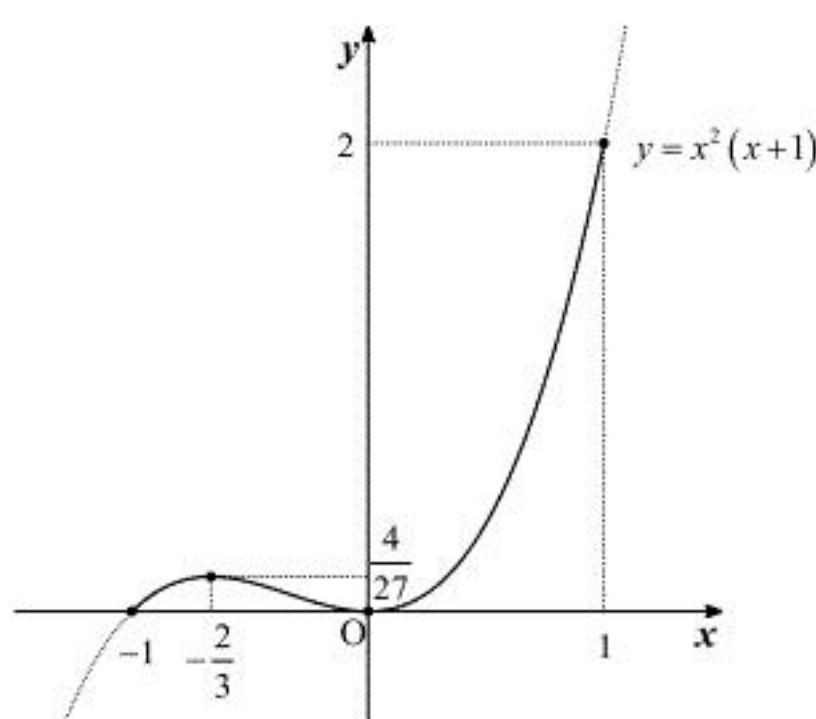
$x^2(x+1) = k$ の解の個数は、曲線 $y = x^2(x+1)$ と直線 $y = k$ の共有点の個数と一致する。ここで、関数 $y = x^2(x+1) (-1 \leq x \leq 1)$ の導関数は

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 + 2x \\ &= x(3x+2) \end{aligned}$$

となる。したがって、増減表は以下のようになる。

x	-1	...	$-\frac{2}{3}$	...	0	...	1
y'		+	0	-	0	+	
y	0	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0	↗	2

上の増減表より、 $y = x^2(x+1)$ のグラフは下図の実線部のようになる。



上図をもとに $y = x^2(x+1)$ と $y = k$ の共有点の個数を調べると、共有点がただ 1 つであるのは、

$\frac{4}{27} < k \leq 2$ のときである。よって、求める k の値の範囲は $\frac{4}{27} < k \leq 2$ である。

(2)

区間 $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ において、 $\sin \theta$ は単調増加であり $-\frac{1}{2} \leq \sin \theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。すなわち、 θ の

値と $\sin \theta$ の値は 1 対 1 対応している。そのため、 $x = \sin \theta$ とおくとき、①の解の個数は x に関する方程式 $x^2(x+1) = k$ の解のうち $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす解の個数と一致する。また、

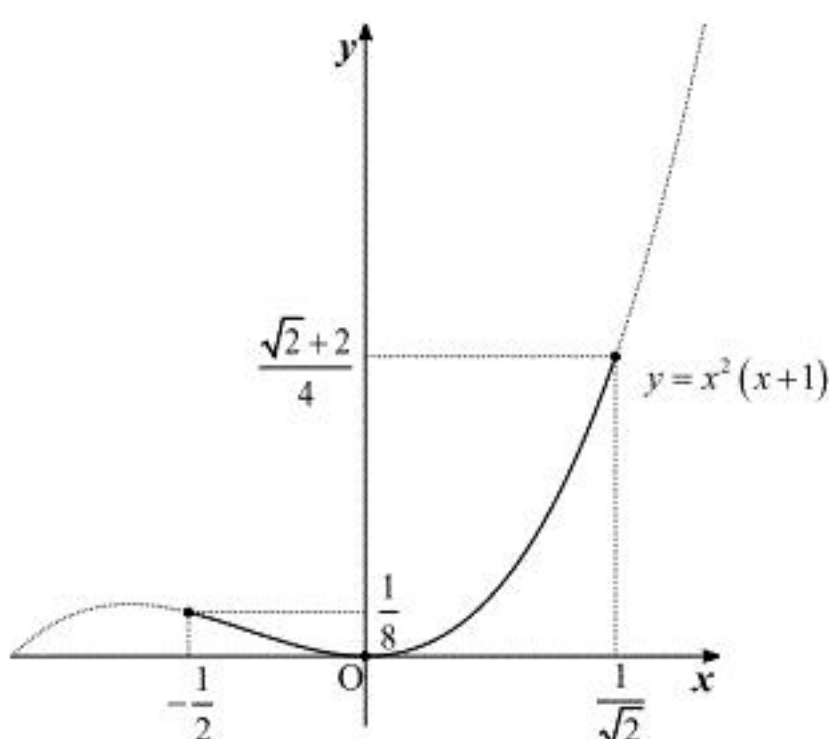
$x^2(x+1) = k$ の解の個数は、曲線 $y = x^2(x+1)$ と直線 $y = k$ の共有点の数と一致する。ここで、

関数 $y = x^2(x+1) (-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}})$ について、

$$x = -\frac{1}{2} \text{ のとき } y = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき } y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

であるから、グラフは以下の実線部のようになる。



上図をもとに $y = x^2(x+1)$ と $y = k$ の共有点の個数を調べると、共有点が 2 つであるのは、

$0 < k \leq \frac{1}{8}$ のときである。よって、求める k の値の範囲は $0 < k \leq \frac{1}{8}$ である。

〔解答〕

(1)	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$		
	1	2		
(2)	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$		
	1	4		
(3)	$\boxed{12}$	$\boxed{13}$	$\boxed{14}$	$\boxed{15}$
	1	5	6	4
(4)	$\boxed{16}$	$\boxed{17}$	$\boxed{18}$	$\boxed{19}$
	6	3	3	2

〔解説〕

(1)

1枚硬貨を投げたときに表が出る確率、裏が出る確率はいずれも $\frac{1}{2}$ である。以下、全ての硬貨を区別して考える。 $X \leq 1$ となるためには $X = 0$ または $X = 1$ となれば良く、 $X = 0$ となる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ であり、 $X = 1$ となる確率は ${}_3C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$ である。以上より、 $X \leq 1$ である確率は、 $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$ である。

(2)

$Z \leq 1$ であるということは、 $X \leq 1$ かつ $Y \leq 1$ であるということである。 $Y \leq 1$ である確率は $X \leq 1$ である確率と等しいから、(1)の結果より $\frac{1}{2}$ である。 X と Y は独立だから、 $Z \leq 1$ である確率は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ である。

(3)

$Z = 3$ の余事象は $Z \leq 2$ である。 $Z \leq 2$ であるということは、 $X \leq 2$ かつ $Y \leq 2$ となるということであり、言い換えれば $X \neq 3$ かつ $Y \neq 3$ である。 $X \neq 3$ である確率は $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8}$ であり、 $Y \neq 3$ である確率も同様に $\frac{7}{8}$ である。したがって、 $Z \leq 2$ である確率は $\frac{7}{8} \times \frac{7}{8} = \frac{49}{64}$ である。以上より、 $Z = 3$ である確率は $1 - \frac{49}{64} = \frac{15}{64}$ である。

(4)

$Z = 0$ である確率は、 $X = 0$ かつ $Y = 0$ である確率であり、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

である。 $Z = 1$ である確率は、 $Z \leq 1$ である確率から $Z = 0$ である確率を引いたものであり、(2)の結果より、

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{15}{64}$$

である。同様に、 $Z = 2$ である確率は、 $Z \leq 2$ である確率から $Z \leq 1$ である確率を引いたものであり、(3)より、

$$\frac{49}{64} - \frac{1}{4} = \frac{33}{64}$$

である。よって、(3)の結果も合わせると Z の期待値は、

$$0 \times \frac{1}{64} + 1 \times \frac{15}{64} + 2 \times \frac{33}{64} + 3 \times \frac{15}{64} = \frac{126}{64} = \frac{63}{32}$$

と求まる。

$B = A + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を両辺2乗して,

$$\begin{aligned}
 B^2 &= \left\{ A + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}^2 \\
 &= A^2 + A \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \\
 &= A^2 + \begin{pmatrix} 1 & a \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ x & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \\
 &= A^2 + \begin{pmatrix} -1 & -2+a \\ -x & -2x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1-2x & -a-2y \\ x & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= A^2 + \begin{pmatrix} -1-2x & -2-2y \\ 0 & 1-2x+2y \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

が得られる。 $B^2 = A^2 + \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ と比較すると,

$$\begin{pmatrix} -1-2x & -2-2y \\ 0 & 1-2x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

が成立するので、各成分ごとに等式を立てると,

$$\begin{cases} -1-2x = -4 & \dots\dots ① \\ -2-2y = -2 & \dots\dots ② \\ 1-2x+2y = z & \dots\dots ③ \end{cases}$$

が得られる。式① $\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$, 式② $\Leftrightarrow y = 0$ であり、これらの値を式③に代入して、 $z = -2$ となる。

(答) $x = \frac{3}{2}, y = 0, z = -2$

(1)

点Pは線分OA上に存在し $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA}$ が成り立つから、 $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA}$ が成立する。 $\overrightarrow{OA} = (-1, 0, 1)$ より $\overrightarrow{OP} = (-t, 0, t)$ であるため、点Pの座標は $(-t, 0, t)$ である。

(答) $P(-t, 0, t)$

(2)

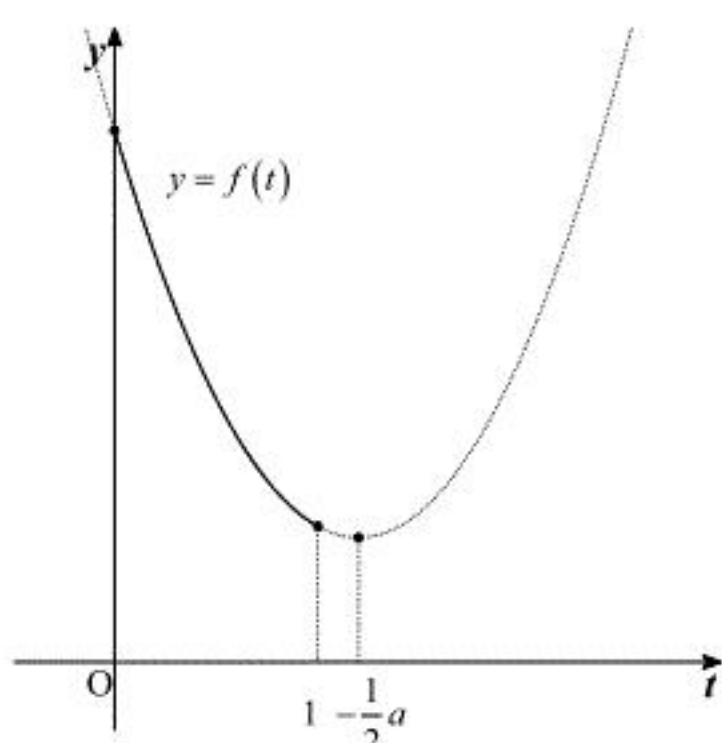
線分PBの長さは、

$$\begin{aligned} PB &= \sqrt{(a+t)^2 + b^2 + (-t)^2} \\ &= \sqrt{2t^2 + 2at + (a^2 + b^2)} \\ &= \sqrt{2\left(t + \frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a^2 + b^2\right)} \end{aligned}$$

と表される。 $f(t) = 2\left(t + \frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a^2 + b^2\right)$ ($0 \leq t \leq 1$)とおくと、 $f(t)$ は軸が $t = -\frac{1}{2}a$ で下に凸の放物線となる。また、 $f(t)$ が最小値をとるとき、PBも最小値をとる。以下では a の値で場合分けして最小値を求める。

[1] $1 < -\frac{1}{2}a \Leftrightarrow a < -2$ のとき

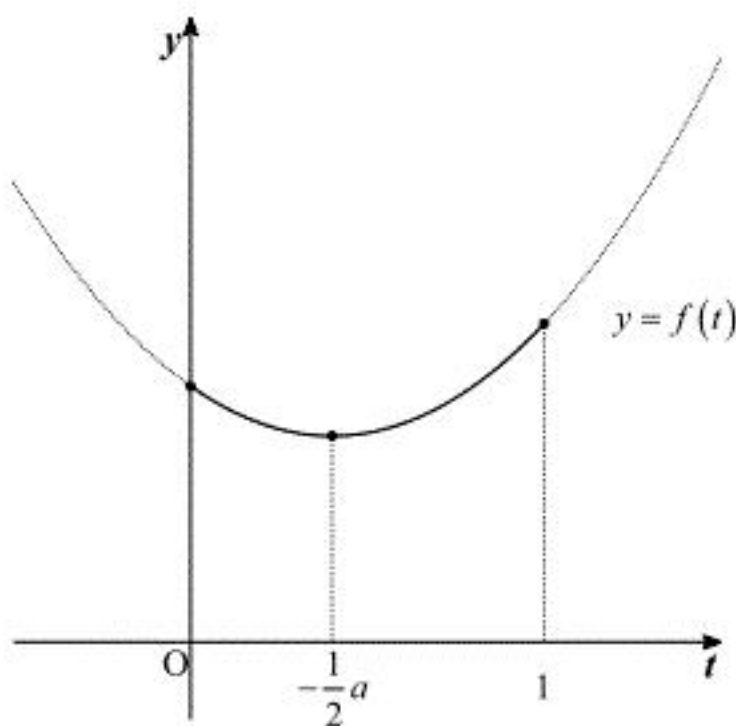
$y = f(t)$ の概形を書くと、下図の実線部ようになる。



グラフより、 $f(t)$ の最小値は $f(1) = a^2 + 2a + 2 + b^2$ である。そのため、PBの最小値は $\sqrt{a^2 + 2a + 2 + b^2}$ である。

[2] $0 < -\frac{1}{2}a \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq a < 0$ のとき

$y = f(t)$ の概形を書くと、下図の実線部ようになる。

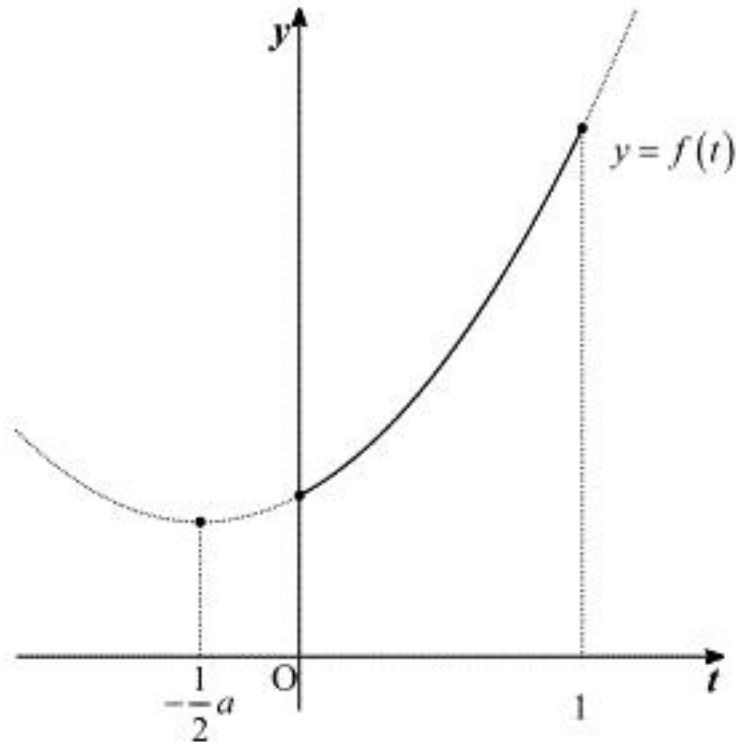


グラフより、 $f(t)$ の最小値は $f\left(-\frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{2}a^2 + b^2$ である。そのため、PBの最小値は

$\sqrt{\frac{1}{2}a^2 + b^2}$ である。

[3] $-\frac{1}{2}a \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a$ のとき

$y = f(t)$ の概形を書くと、下図の実線部ようになる。



グラフより、 $f(t)$ の最小値は $f(0) = a^2 + b^2$ である。そのため、PBの最小値は $\sqrt{a^2 + b^2}$ である。

以上[1], [2], [3]より、PBの最小値は、

$$\begin{aligned} &\sqrt{a^2 + 2a + 2 + b^2} \quad (a < -2) \\ &\sqrt{\frac{1}{2}a^2 + b^2} \quad (-2 \leq a < 0) \\ &\sqrt{a^2 + b^2} \quad (0 \leq a) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) 前述

(3)

(2)の結果をもとに、 a で場合分けをして考える。

[1] $a < -2$ のとき

最小値が1となるため、

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + 2a + 2 + b^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow a^2 + 2a + 2 + b^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (a+1)^2 + b^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -1, b = 0 \end{aligned}$$

となる。これは $a < -2$ に反するため、不適である。

[2] $-2 \leq a < 0$ のとき

最小値が1となるため、

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + b^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}a^2 + b^2 &= 1 \end{aligned}$$

となる。

[3] $0 \leq a$ のとき

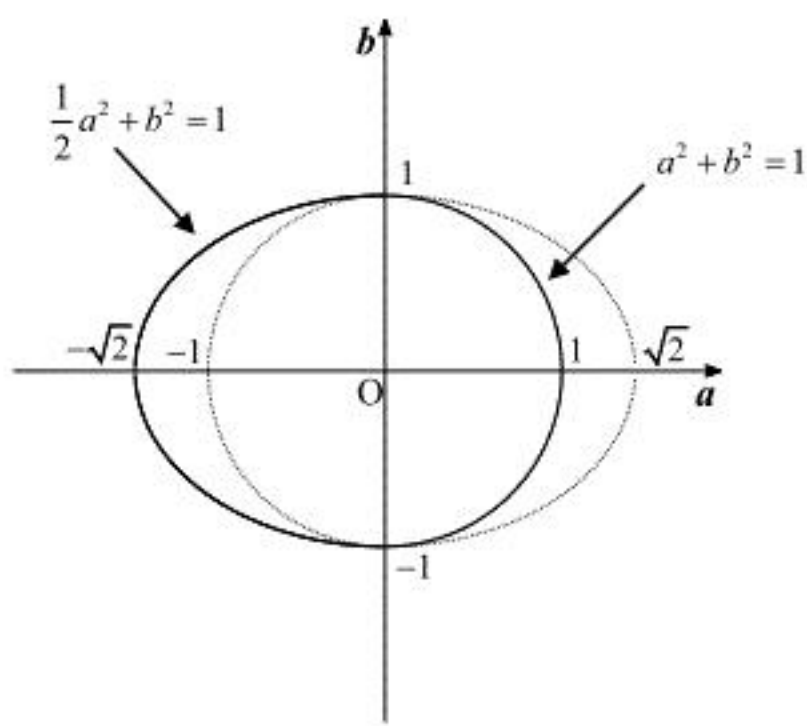
最小値が1となるため、

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &= 1 \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2], [3]より、 $-2 \leq a < 0$ のとき $\frac{1}{2}a^2 + b^2 = 1$ 、 $0 \leq a$ のとき $a^2 + b^2 = 1$ である。これを座

標平面上に図示すると下図の実線部ようになる。



(答) 前図

(1)

関数 $f(x) = \frac{e^x}{e^x + a}$ を x で微分すると,

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + a) - e^x \cdot e^x}{(e^x + a)^2} = \frac{ae^x}{(e^x + a)^2}$$

$$f''(x) = \frac{ae^x(e^x + a)^2 - ae^x \cdot 2e^x(e^x + a)}{(e^x + a)^4} = \frac{ae^x(-e^x + a)}{(e^x + a)^3}$$

となる。変曲点の x 座標は $f''(x) = 0$ を満たし、これを求めると、

$$\frac{ae^x(-e^x + a)}{(e^x + a)^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = a \quad (\because a > 0)$$

$$\Leftrightarrow x = \log a$$

である。したがって増減表を書くと、以下のようになる。

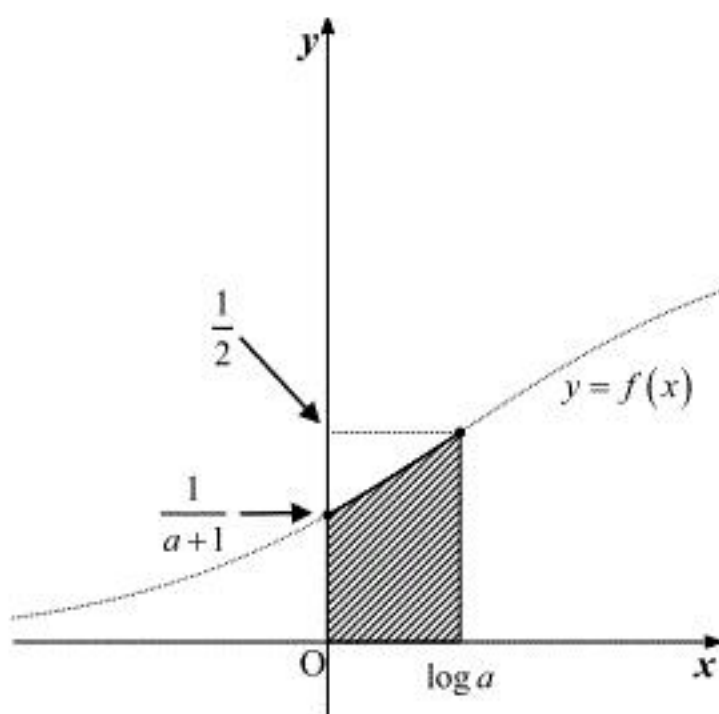
x	$\cdots$	$\log a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\curvearrowright$

以上より、変曲点の座標は、 $\left(\log a, \frac{1}{2}\right)$ である。

(答) $\left(\log a, \frac{1}{2}\right)$

(2)

直線 ℓ は、点 $\left(\log a, \frac{1}{2}\right)$ を通り y 軸に平行な直線であるので、 $x = \log a$ である。求める面積は、以下の斜線部の面積に等しくなる。



以上より、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\log a} \frac{e^x}{e^x + a} dx \\ &= \int_0^{\log a} \frac{(e^x + a)'}{e^x + a} dp \\ &= \left[\log(e^x + a) \right]_0^{\log a} \\ &= \log \frac{2a}{a+1} \end{aligned}$$

となる。

(答) $S = \log \frac{2a}{a+1}$

(3)

(2)の結果を用いると、

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} S &= \lim_{a \rightarrow \infty} \log \frac{2a}{a+1} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \log \frac{2}{1 + \frac{1}{a}} \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\log 2$