

〔解答〕

1	1
2	8
3	1
4	1
5	3
6	2
7	7

〔解説〕

真数条件, 底の条件より, $x > 0, x \neq 1$ である。 $X = \log_3 x$ とおくと, $X \neq 0$ であり,

$$\log_x 81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 x} = \frac{4}{X}$$

が成り立つ。したがって, 与式は,

$$(\log_3 x)^2 + 3 \log_x 81 < 13$$

$$\Leftrightarrow X^2 + 3 \cdot \frac{4}{X} < 13$$

$$\Leftrightarrow X^2 + \frac{12}{X} - 13 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{X}(X^3 - 13X + 12) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{X}(X-1)(X+4)(X-3) < 0$$

$$\Leftrightarrow X(X-1)(X+4)(X-3) < 0 \quad (\because X^2 > 0)$$

$$\therefore -4 < X < 0, 1 < X < 3$$

と変形される。よって,

$$-4 < \log_3 x < 0, 1 < \log_3 x < 3$$

$$\therefore \frac{1}{81} < x < 1, 3 < x < 27$$

となる。

〔解答〕

(1)	8	8
	9	1
	10	5
(2)	11	2
	12	1
	13	1
	14	4

〔解説〕

(1)

$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおくと, 4 点 O, A, B, C は 1 辺の長さ 1 の正四面体をなすから,

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

である。また, 点 L, M の定め方より,

$$\overrightarrow{OL} = \frac{2}{5}\vec{a}, \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\vec{b}$$

であることから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{LM} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OL} \\ &= -\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} \end{aligned}$$

である。さらに, 点 N は辺 BC 上にあるから, $0 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t を用いて

$$\overrightarrow{ON} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$$

と表すことができる。すると,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} \\ &= (1-t)\vec{b} + t\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{b} \\ &= \left(\frac{2}{3} - t\right)\vec{b} + t\vec{c} \end{aligned}$$

となる。以上より,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{LM} \cdot \overrightarrow{MN} &= \left(-\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) \cdot \left\{\left(\frac{2}{3} - t\right)\vec{b} + t\vec{c}\right\} \\ &= -\frac{2}{5}\left(\frac{2}{3} - t\right)\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} - t\right)|\vec{b}|^2 - \frac{2}{5}t\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{3}t\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= -\frac{1}{6}t + \frac{4}{45} \end{aligned}$$

である。ここで, $\angle LMN = 90^\circ$ であることから, $\overrightarrow{LM} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ である。したがって,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6}t + \frac{4}{45} &= 0 \\ \therefore t &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

となる。 $\overrightarrow{BN} = t\overrightarrow{BC}$ より, BN の長さは,

$$|\overrightarrow{BN}| = t|\overrightarrow{BC}| = \frac{8}{15}$$

である。

(2)

(1)より,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \left(\frac{2}{3} - t\right)\vec{b} + t\vec{c} = \frac{2}{15}\vec{b} + \frac{8}{15}\vec{c} \\ \overrightarrow{BN} &= t(-\vec{b} + \vec{c}) = -\frac{8}{15}\vec{b} + \frac{8}{15}\vec{c} \end{aligned}$$

である。よって,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{MN}|^2 &= \frac{4}{15^2}|\vec{b}|^2 + 2 \times \frac{16}{15^2}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{64}{15^2}|\vec{c}|^2 \\ &= \frac{84}{15^2} \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BN} &= \left(\frac{2}{15}\vec{b} + \frac{8}{15}\vec{c}\right) \cdot \left(-\frac{8}{15}\vec{b} + \frac{8}{15}\vec{c}\right) \\ &= -\frac{16}{15^2}|\vec{b}|^2 + \left(\frac{2}{15} - \frac{8}{15}\right)\frac{8}{15}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{64}{15^2}|\vec{c}|^2 \\ &= \frac{24}{15^2} \end{aligned}$$

である。また, (1)より $|\overrightarrow{BN}| = \frac{8}{15}$ である。以上より,

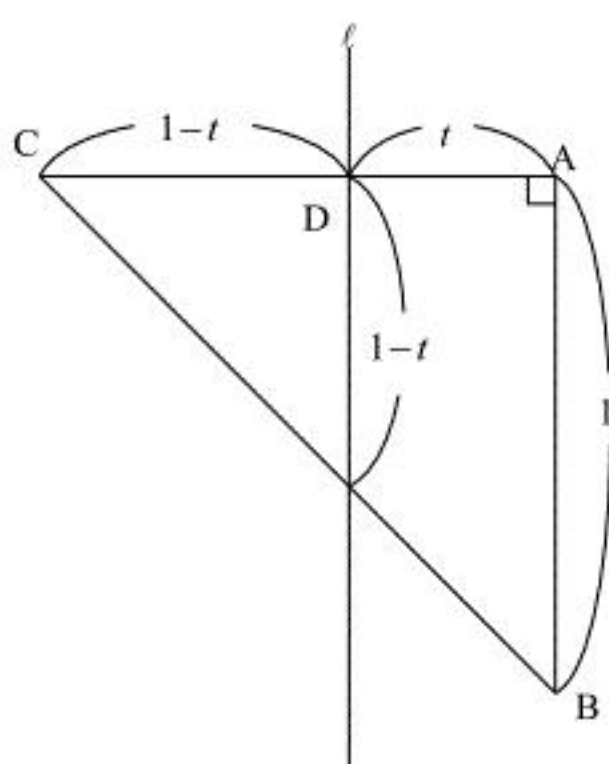
$$\begin{aligned} \cos \angle MNB &= \frac{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{MN}| |\overrightarrow{BN}|} \\ &= \frac{\frac{24}{15^2}}{\sqrt{\frac{84}{15^2}} \times \frac{8}{15}} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{21}} \\ &= \frac{\sqrt{21}}{14} \end{aligned}$$

である。

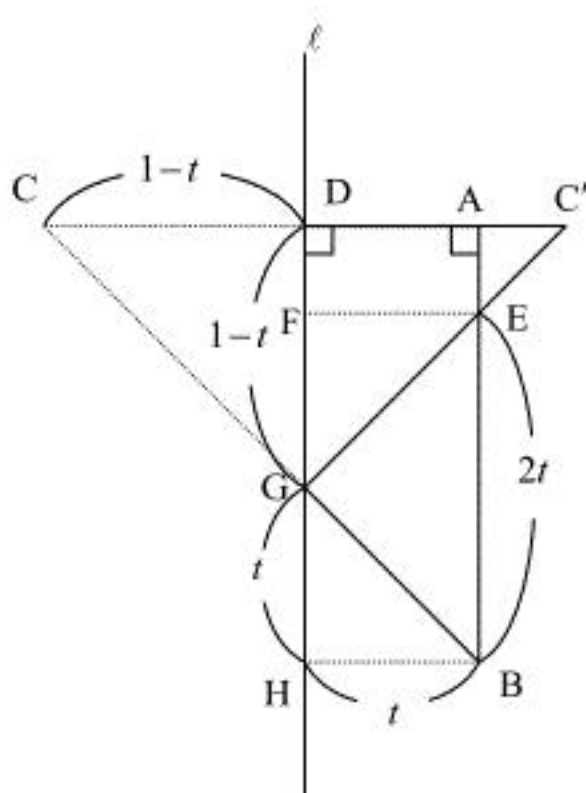
3

(1)

$\triangle ABC$ と直線 ℓ を図示すると以下のようになる。



ここで、以下のように点 $C', D \sim H$ をおく。ただし、点 C' は ℓ に関して C と対称な点であり、 $EF \perp \ell, BH \perp \ell$ である。 $t \leq \frac{1}{2}$ より $t \leq 1-t$ であるから、点 C' は辺 DA の A 側の延長線上にある。



このとき、回転体の体積は三角形 DGC' を回転させてできた円錐と長方形 $FHBE$ を回転させてできた円柱の体積の和から三角形 FGE, GHB をそれぞれ回転させてできた円錐の体積を引いたものになる。三角形 DGC' を回転させてできた円錐は、底面が半径 $1-t$ の円、高さが $1-t$ の円錐であり、長方形 $FHBE$ を回転させてできた円柱は底面が半径 t の円、高さが $2t$ の円柱である。また、三角形 FGE, GHB をそれぞれ回転させてできた円錐はともに底面が半径 t の円、高さが t の円錐となる。したがって、

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{3}(1-t)^2 \pi \cdot (1-t) + t^2 \pi \cdot 2t - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot t^2 \pi \cdot t \\ &= \frac{(1-t)^3}{3} \pi + 2t^3 \pi - \frac{2}{3} t^3 \pi \\ &= \left(t^3 + t^2 - t + \frac{1}{3} \right) \pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $V(t) = \left(t^3 + t^2 - t + \frac{1}{3} \right) \pi$

(2)

$$\begin{aligned} V'(t) &= (3t^2 + 2t - 1) \pi \\ &= (3t - 1)(t + 1) \pi \end{aligned}$$

であるから、 $V(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	(0)	...	$\frac{1}{3}$	...	$\frac{1}{2}$
$V'(t)$	$\times$	-	0	+	$\times$
$V(t)$	$\times$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

上表より、 $V(t)$ は $t = \frac{1}{3}$ で最小値をとり、その値は、

$$\begin{aligned} V\left(\frac{1}{3}\right) &= \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \right\} \pi \\ &= \frac{4}{27} \pi \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{4}{27} \pi$

(1)

C_1, C_2 の共有点の x 座標を θ とすると, $C_1: y = a \cos x$, $C_2: y = \sin x$ より, θ は

$$a \cos \theta = \sin \theta \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす。 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ に $\textcircled{1}$ を代入して,

$$(a \cos \theta)^2 + \cos^2 \theta = 1$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 1) \cos^2 \theta = 1$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{a^2 + 1}$$

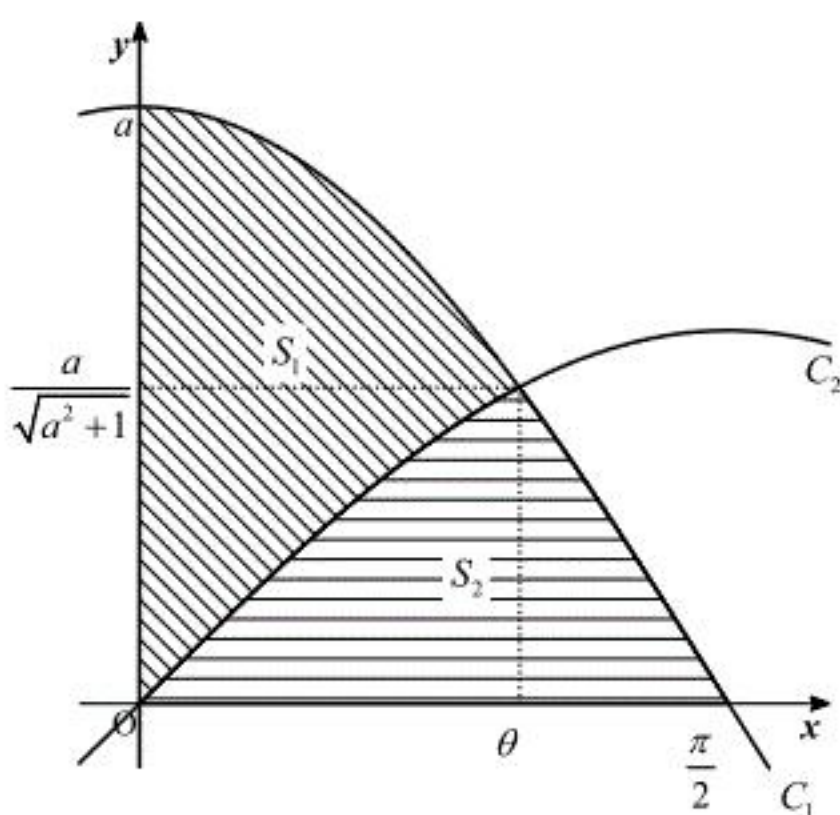
となる。 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos \theta \geq 0$ であるから, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$ となる。 $\textcircled{1}$ に代入して,

$$\sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \text{ である。}$$

$$(\text{答}) \quad \sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

(2)

下図の斜線部の面積を S_1 , 横線部の面積を S_2 とおく。



このとき,

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos x dx \\ &= [a \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= a - 0 \\ &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\theta} (a \cos x - \sin x) dx \\ &= [a \sin x + \cos x]_0^{\theta} \\ &= (a \sin \theta + \cos \theta) - (0 + 1) \\ &= a \sin \theta + \cos \theta - 1 \\ &= \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} - 1 \\ &= \sqrt{a^2 + 1} - 1 \end{aligned}$$

である。ここで, C_1 と x 軸, y 軸で囲まれた部分の面積が C_2 によって 2 等分されるとき,

$S_1 = S_2$, すなわち $S_1 = \frac{S_1 + S_2}{2}$ が成り立つ。よって, このとき,

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + 1} - 1 &= \frac{a}{2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 1} &= \frac{a}{2} + 1 \\ \Leftrightarrow a^2 + 1 &= \frac{a^2}{4} + a + 1 \left(\because \frac{a}{2} + 1 > 0 \right) \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4} a^2 - a &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4} a \left(a - \frac{4}{3} \right) &= 0 \\ \therefore a &= \frac{4}{3} \left(\because a > 0 \right) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{4}{3}$$

(1)

与式は

$$\begin{aligned}
 \int t e^t dt &= \int t (e^t)' dt \\
 &= t e^t - \int e^t dt \\
 &= t e^t - e^t + C \\
 &= (t-1) e^t + C
 \end{aligned}$$

となる。ただし、 C は積分定数である。

$$(\text{答}) \int t e^t dt = (t-1) e^t + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(2)

 $0 \leq t \leq a$ のとき $|t-a| = -(t-a)$, $a \leq t \leq 1$ のとき $|t-a| = t-a$ である。また, (1)より,

$$\int (t-a) e^t dt = (t-1) e^t - a e^t + C$$

である(C は積分定数とする)。したがって,

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^a -(t-a) e^t dt + \int_a^1 (t-a) e^t dt \\
 &= \left[-(t-1) e^t + a e^t \right]_0^a + \left[(t-1) e^t - a e^t \right]_a^1 \\
 &= e^a - (a+1) + (-a) e - (-1) e^a \\
 &= 2e^a - a e - a - 1
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 2e^a - a e - a - 1$$

(3)

(2)で求めた S の式を a で微分すると,

$$\frac{dS}{da} = 2e^a - e - 1$$

である。これは単調増加し, $\frac{dS}{da} = 0$ となる a は,

$$2e^a - e - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^a = \frac{e+1}{2}$$

$$\therefore a = \log \frac{e+1}{2}$$

である。 $1 < \frac{1+e}{2} < e$ より, この a は $0 \leq a \leq 1$ を満たす。よって, S の増減表は以下のようになる。

a	0	...	$\log \frac{e+1}{2}$	...	1
$\frac{dS}{da}$		-	0	+	
S		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

上表より, S を最小とする a の値は $\log \frac{e+1}{2}$ である。

$$(\text{答}) \quad a = \log \frac{e+1}{2}$$