

【解答】

(1)	ア	イ	ウ
	3	-49	$\sqrt{7}$
(2)	エ	オ	
	420	$\frac{11}{14}$	
(3)	カ	キ	
	$\frac{33}{65}$	84	

【解説】

(1)

i)

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 3\end{aligned}$$

となる。

ii)

$$\begin{aligned}(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) &= 2|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} - 6|\vec{b}|^2 \\ &= 8 - 3 - 54 \\ &= -49\end{aligned}$$

となる。

iii)

$$\begin{aligned}|\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 4 - 6 + 9 \\ &= 7\end{aligned}$$

であり、 $|\vec{a} - \vec{b}| > 0$ であるから、

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}$$

となる。

(2)

i)

それぞれカードを 2 枚ずつ引くから、

$${}_8C_2 \cdot {}_6C_2 = 28 \cdot 15 = 420$$

より、求める場合の数は 420 通りある。

ii)

B と C が 9, 10 のカードを引かないとき、カードの組み合わせは全部で、

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 = 15 \cdot 6 = 90$$

より、90 通りである。ここで、B と C が 9, 10 のカードの少なくとも一方を引く場合に A は負ける。i) より、そのようなカードの組み合わせは、

$$420 - 90 = 330$$

より、330 通りである。B と C の引くカードの組み合わせは、いずれも同様に確からしいから、求める確率は、

$$\frac{330}{420} = \frac{11}{14}$$

となる。

(3)

i)

余弦定理より、

$$\begin{aligned}\cos \angle A &= \frac{AB^2 + CA^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot CA} \\ &= \frac{15^2 + 13^2 - 14^2}{2 \cdot 15 \cdot 13} \\ &= \frac{198}{2 \cdot 15 \cdot 13} \\ &= \frac{33}{65}\end{aligned}$$

となる。

ii)

$0 < \angle A < \pi$ より、 $\sin \angle A > 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\sin \angle A &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle A} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1089}{4225}} \\ &= \sqrt{\frac{3136}{4225}} \\ &= \frac{56}{65}\end{aligned}$$

である。よって、 $\triangle ABC$ の面積を S とすると、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CA \cdot \sin \angle A \\ &= \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 13 \cdot \frac{56}{65} \\ &= 84\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned}
 f(\theta) &= 2\cos 3\theta - \cos 2\theta + 2\cos \theta - 1 \\
 &= 2(4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) - (2\cos^2 \theta - 1) + 2\cos \theta - 1 \\
 &= 8\cos^3 \theta - 2\cos^2 \theta - 4\cos \theta
 \end{aligned}$$

である。 $\cos \theta = a$ とおくと、 $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ より、

$$-\frac{1}{2} \leq a \leq 1$$

となり、 $f(\theta) = 8a^3 - 2a^2 - 4a$ となる。ここで、 $g(a) = 8a^3 - 2a^2 - 4a$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 g'(a) &= 24a^2 - 4a - 4 \\
 &= 4(2a-1)(3a+1)
 \end{aligned}$$

である。 $g'(a) = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ であるから、増減表は以下のようになる。

a	$-\frac{1}{2}$	...	$-\frac{1}{3}$	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$g'(a)$		+	0	-	0	+	
$g(a)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{22}{27}$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	2

したがって、増減表より、 $g(a)$ は $a = \frac{1}{2}$ で最小値 $-\frac{3}{2}$ 、 $a = 1$ で最大値2をとるから、 $f(\theta)$ は

$\cos \theta = \frac{1}{2}$ で最小値 $-\frac{3}{2}$ 、 $\cos \theta = 1$ で最大値2をとる。

(答) $\cos \theta = 1$ のとき最大値2、 $\cos = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $-\frac{3}{2}$

$$y = x \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$y = x^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

とおく。①と②の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow x &= 2 \end{aligned}$$

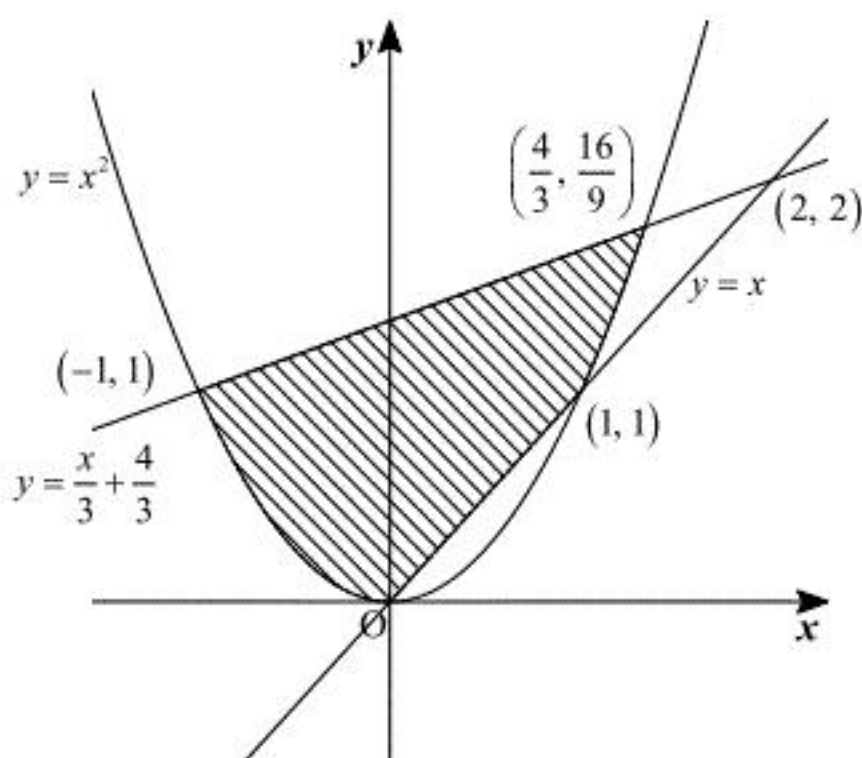
となる。よって、①と②の共有点は $(2, 2)$ となる。また、①と③の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned} x &= x^2 \\ \Leftrightarrow x(x-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, 1 \end{aligned}$$

となる。よって、①と③の共有点は $(0, 0), (1, 1)$ となる。さらに、②と③の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} &= x^2 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3x-4)(x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1, \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。よって、②と③の共有点は $(-1, 1), \left(\frac{4}{3}, \frac{16}{9}\right)$ となる。したがって、連立不等式が表す領域は下図の斜線部のようにになる。ただし、境界線を含む。



また、この面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{\frac{4}{3}} \left(\frac{x}{3} + \frac{4}{3} - x^2 \right) dx - \int_0^1 (x - x^2) dx \\ &= \int_{-1}^{\frac{4}{3}} \left(x - \frac{4}{3} \right) (x+1) dx - \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{\left(\frac{4}{3} + 1 \right)^3}{6} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{343 - 27}{162} \\ &= \frac{158}{81} \end{aligned}$$

となる。