

[解答]

$\mathcal{A}$	$\mathcal{I}$
$k \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$	$k \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}$

[解説]

(1)

$0 < \alpha < 2\pi$ を満たす定数 α を用いて、 $f(\theta) = \cos \theta + k \sin \theta = \sqrt{1+k^2} \sin(\theta + \alpha)$ とおける。ただ

し $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$, $\cos \alpha = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$ である。 θ が全実数を動くとき、 $f(\theta)$ の動く範囲は

$$-\sqrt{1+k^2} \leq f(\theta) \leq \sqrt{1+k^2}$$

となる。したがって、不等式 $\cos \theta + k \sin \theta \leq 2k$ がすべての実数 θ について成り立つとき、

$$\sqrt{1+k^2} \leq 2k \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つことが条件である。 k は実数であるので、 $\sqrt{1+k^2} > 0$ となり、 $k > 0$ がわかる。よって、 $\textcircled{1}$ を解いて、

$$\sqrt{1+k^2} \leq 2k$$

$$\Leftrightarrow (1+k^2) \leq 4k^2$$

$$\therefore k \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\because k > 0)$$

が得られる。

(2)

(1)と同様に、不等式 $\cos \theta + k \sin \theta \leq 2k$ を満たす θ が少なくとも1つ存在するためには、

$$-\sqrt{1+k^2} \leq 2k \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つことが条件である。 $k \geq 0$ のとき、 $-\sqrt{1+k^2} < 0$, $2k \geq 0$ が成り立つので、 $\textcircled{2}$ は成立する。 $k < 0$ のとき、

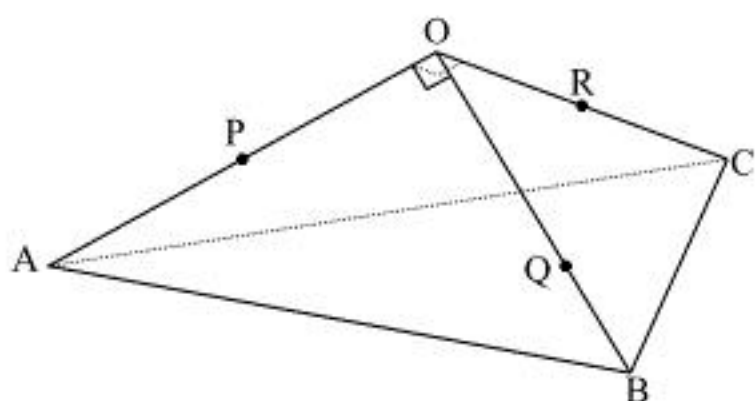
$$-\sqrt{1+k^2} \leq 2k$$

$$\Leftrightarrow (1+k^2) \geq 4k^2 \quad (\because k < 0)$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq k < 0$$

となる。これと $k \geq 0$ を合わせて、求める k の範囲は、 $k \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$ である。

(1)



与えられた数値を用いて,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos \angle AOB = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\overrightarrow{OB}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cdot \cos \angle BOC = 3$$

となる。

(答) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{b} \cdot \vec{c} = 3$

(2)

(1)と同様にして,

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = |\overrightarrow{OC}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot \cos \angle COA = 0$$

である。ここで,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}$$

と変形でき, さらに $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}\vec{c}$ であるので,

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{PR} = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$$

となる。これと (1)と合わせて,

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = \frac{4}{9}|\vec{b}|^2 - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 = 8$$

$$|\overrightarrow{PR}|^2 = \frac{1}{4}|\vec{c}|^2 - \frac{1}{2}\vec{c} \cdot \vec{a} + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 = 5$$

となり, また,

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \frac{1}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 = 5$$

となる。これより, $\triangle PQR$ の面積を S とすると,

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 |\overrightarrow{PR}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR})^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

が得られる。

(答) $\frac{\sqrt{15}}{2}$

[解答]

ウ	エ	オ
$\frac{1}{18}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{19}{4}$

[解説]

(1)

さいころを投げて出る目はいずれも同様に確からしい。1の目と2の目が1回ずつ出ればよいから、求める確率は、

$$2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$$

となる。

(答) $\frac{1}{18}$

(2)

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6
1	4	4	4	4	5	5
2	4	5	4	4	5	5
3	4	4	5	4	5	5
4	4	4	4	5	5	5
5	5	5	5	5	6	6
6	5	5	5	5	6	6

a :1回目に出た目の数, b :2回目に出た目の数

上の表は、2回サイコロを投げた後に残る文字の個数を表したものであり、これより、文字列の長さが4になる確率は、 $\frac{13}{36}$ となる。

(答) $\frac{13}{36}$

(3)

(2)の表より、文字列の長さが5となる確率は $\frac{19}{36}$ 、文字列の長さが6となる確率は $\frac{4}{36}$ である。

したがって、求める期待値は、

$$\frac{13}{36}\times4+\frac{19}{36}\times5+\frac{4}{36}\times6=\frac{19}{4}$$

となる。

(答) $\frac{19}{4}$

(1)

正方形の1辺と斜辺の長さの比は $1:\sqrt{2}$ である。よって、 n 番目の正方形の一辺の長さを d_n とおくと、

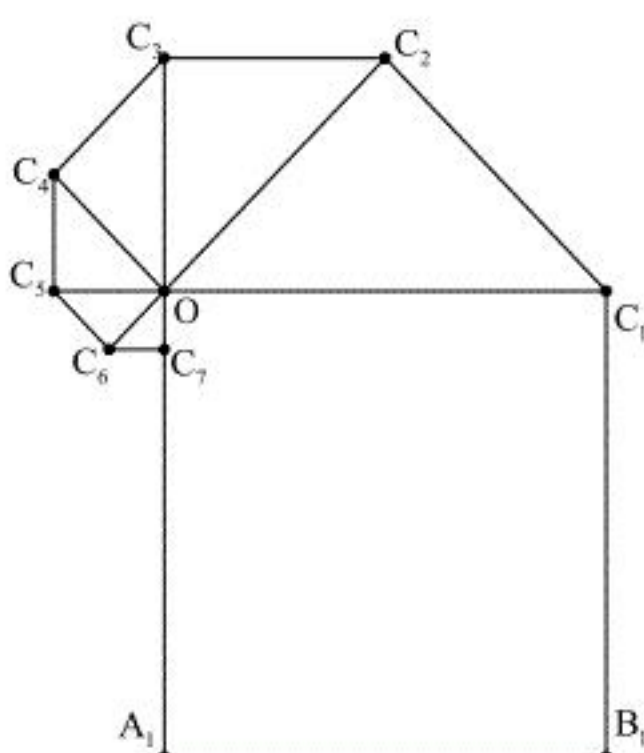
$$d_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} d_n$$

が成り立つ。また、 $d_1=1$ である。これより、数列 d_n は初項1、公比 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の等比数列であるの

で、 $d_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$ となる。

$$(\text{答}) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

(2)



図示すると上図のようになる。この図形の面積を S' とおくと、辺の長さが1の正方形 $OC_1B_1A_1$ の面積と斜辺でない辺の長さが d_2 から d_7 の6つの直角二等辺三角形の面積の総和と考えて、

$$\begin{aligned} S' &= 1 + \sum_{k=2}^7 \left(\frac{1}{2} \cdot d_k^2 \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=2}^7 \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{k-1} \right\}^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=2}^7 \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^6 \right)}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{191}{128} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \text{図形 } S : \text{上図, 面積} : \frac{191}{128}$$

(3)

(1)より、

$$\begin{aligned} l_n &= \sum_{k=1}^n d_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{k-1} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} l_n &= \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= 2 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \lim_{n \rightarrow \infty} l_n = 2 + \sqrt{2}$$

5

(1)

$f(x)$ を微分して、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x x - e^x}{x^2} \\ &= \frac{e^x (x-1)}{x^2} \end{aligned}$$

となるから、 $x > 0$ の範囲における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	1	...
$f'(x)$	$\nearrow$	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	e	$\nearrow$

したがって、増減表より、 $f(x)$ は $x > 0$ において、 $x = 1$ で最小値 e をとる。

(答) e

(2)

真数条件より、 $x > 0$ である。また、 $g(x)$ を微分して、

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1 - \log x}{x^2} \\ &= \frac{\log e - \log x}{x^2} \end{aligned}$$

となるから、 $x > 0$ の範囲における $g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	e	...
$g'(x)$	$\nearrow$	+	0	-
$g(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

したがって、増減表より、 $g(x)$ は $x > 0$ において、 $x = e$ で最大値 $\frac{1}{e}$ をとる。

(答) $\frac{1}{e}$

(3)

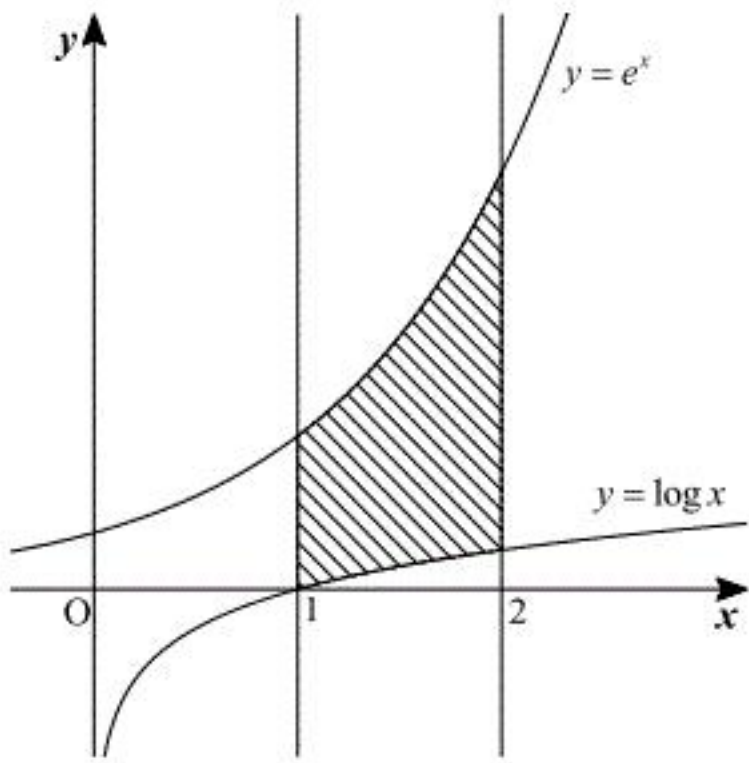
(1), (2) より、 $x > 0$ の範囲で、($f(x)$ の最小値) $>$ ($g(x)$ の最大値) であるから、 $f(x) - g(x) > 0$ が得られる。これより、

$$\begin{aligned} e^x - \log x &= x \left(\frac{e^x}{x} - \frac{\log x}{x} \right) \\ &= x (f(x) - g(x)) \\ &> 0 \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

であるから、 $e^x > \log x$ は示された。

(証明終)

(4)



求める体積は、上図の斜線部を x 軸を中心として 1 回転させた立体の体積であるから、求める体積を V として、

$$V = \int_1^2 \pi (e^x)^2 dx - \int_1^2 \pi (\log x)^2 dx$$

と表せる。ここで、積分定数 C, C' を用いて、

$$\begin{aligned} \int (e^x)^2 dx &= \frac{1}{2} e^{2x} + C \\ \int (\log x)^2 dx &= x (\log x)^2 - \int 2 \log x dx + C' \\ &= x (\log x)^2 - 2x \log x + 2x + C' \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 \pi (e^x)^2 dx - \int_1^2 \pi (\log x)^2 dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_1^2 - \pi \left[x (\log x)^2 - 2x \log x + 2x \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \pi (e^4 - e^2) - \pi \{ 2 (\log 2)^2 - 4 \log 2 + 2 \} \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e^2 - 2 (\log 2)^2 + 4 \log 2 - 2 \right\} \end{aligned}$$

が得られる。

(答) $\pi \left\{ \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e^2 - 2 (\log 2)^2 + 4 \log 2 - 2 \right\}$