

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	3	4	2

〔解説〕

(1)

真数条件より、 $X = 1 - \log_3 x > 0$ であり、 $x > 0$ である。与式は、

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{8}} X &> \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{8}} X &> \log_{\frac{1}{8}} \left(\frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

となる。底 $\frac{1}{8}$ は 1 より小さいから、

$$\begin{aligned}X &< \left(\frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{3}} \\ \therefore X &< \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。よって、真数条件と合わせて、 $0 < X < \frac{1}{2}$ である。したがって、 $X = 1 - \log_3 x$ より、

$$\begin{aligned}0 &< 1 - \log_3 x < \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &< \log_3 x < 1 \\ \Leftrightarrow \log_3 3^{\frac{1}{2}} &< \log_3 x < \log_3 3\end{aligned}$$

となる。底 3 は 1 より大きいから、

$$\sqrt{3} < x < 3$$

である。これは、 $x > 0$ を満たすので、これが解である。

(2)

$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$, $\cos \theta \sin \theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$, $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned}y &= a \cos^2 \theta + (a - b) \cos \theta \sin \theta + b \sin^2 \theta \\ &= a \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + (a - b) \cdot \frac{\sin 2\theta}{2} + b \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ &= \frac{a - b}{2} (\sin 2\theta + \cos 2\theta) + \frac{a + b}{2} \\ &= \frac{a - b}{2} \cdot \sqrt{2} \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{a + b}{2}\end{aligned}$$

と表される。ここで、 $a \geq b$ であるから、 $a - b \geq 0$ であることに注意すれば、

$-1 \leq \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$ であるから、

$$-\sqrt{2} \cdot \frac{a - b}{2} + \frac{a + b}{2} \leq y \leq \sqrt{2} \cdot \frac{a - b}{2} + \frac{a + b}{2}$$

である。 y の最大値が $3 + \sqrt{2}$ 、最小値が $3 - \sqrt{2}$ であることから、

$$-\sqrt{2} \cdot \frac{a - b}{2} + \frac{a + b}{2} = 3 - \sqrt{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{a - b}{2} + \frac{a + b}{2} = 3 + \sqrt{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。① + ② より、

$$a + b = 6$$

であり、② - ① より、

$$\begin{aligned}\sqrt{2}(a - b) &= 2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow a - b &= 2\end{aligned}$$

である。よって、2 式より、

$$a = 4, b = 2$$

と求まる。

(1)

袋に k 個 ($1 \leq k \leq n$) の球が入っているとき、球の取り出し方は k 通りであり、その確率は同様に確からしく $\frac{1}{k}$ である。赤球を取り出した時は袋に戻すことから、 n 回とも赤球を取り出す確率 p_n は、

$$p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

である。

(2)

q_1 は、1 回目に白球を取り出す確率で、

$$q_1 = \frac{2}{3}$$

である。 q_2 は、白球を1回目に取り出す場合と2回目に取り出す場合に分けて考えれば、白球を取り出した時は袋に戻さないことに注意して、

$$q_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$$

である。 q_3 についても同様に、白球を1, 2, 3 回目にそれぞれ取り出す場合に分けて考えれば、

$$q_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{19}{54}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad q_1 = \frac{2}{3}, q_2 = \frac{5}{9}, q_3 = \frac{19}{54}$$

(3)

$k-1$ 回目までは赤球を、 k 回目は白球を、 $k+1$ 回目から n 回目までは赤球が出る場合であるから、

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

(4)

(3)で求めた確率は、 $k=1, 2, \dots, n$ について排反であるから、

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{2^{n-2}} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2^{n-2}} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}$$

(1)

$a=1$ のとき、 $t \geq 1$ のとき $|t-1|=t-1$ 、 $t < 1$ のとき $|t-1|=-(t-1)$ となる。よって、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 t|t-1|dt \\ &= \int_0^1 \{-t(t-1)\}dt + \int_1^2 t(t-1)dt \\ &= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) 1

(2)

(1)と同様に、 $t \geq a$ のとき $|t-a|=t-a$ 、 $t < a$ のとき $|t-a|=-(t-a)$ となる。よって、 $0 \leq a \leq 2$ より、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 t|t-a|dt \\ &= \int_0^a \{-t(t-a)\}dt + \int_a^2 t(t-a)dt \\ &= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{at^2}{2}\right]_0^a + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{at^2}{2}\right]_a^2 \\ &= \left(-\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2}\right) + \left(\frac{8}{3} - 2a\right) - \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2}\right) \\ &= \frac{a^3 - 6a + 8}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{a^3 - 6a + 8}{3}$

(3)

(2)より、

$$\frac{dI}{da} = \frac{3a^2 - 6}{3} = (a + \sqrt{2})(a - \sqrt{2})$$

であるから、 $0 \leq a \leq 2$ における I の増減表は以下のようになる。

a	0	...	$\sqrt{2}$	...	2
$\frac{dI}{da}$		-	0	+	
I		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって、 I は、 $a = \sqrt{2}$ のときに最小値をとり、その値は、

$$\frac{(\sqrt{2})^3 - 6\sqrt{2} + 8}{3} = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{3}$$

となる。

(答) $a = \sqrt{2}$, 最小値 $\frac{8 - 4\sqrt{2}}{3}$