

1

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
2	-1	$\frac{55}{39}$	$5\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{20}$

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}\frac{x+4}{x^3+3x^2+2x} &= \frac{a}{x(x+1)} + \frac{b}{(x+1)(x+2)} \\ \Leftrightarrow \frac{x+4}{x^3+3x^2+2x} &= \frac{a(x+2)+bx}{x(x+1)(x+2)} \\ \therefore \frac{x+4}{x^3+3x^2+2x} &= \frac{(a+b)x+2a}{x^3+3x^2+2x}\end{aligned}$$

である。これは x についての恒等式であるから、両辺の分子の係数を比較して、

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a=4 \end{cases}$$

$$\therefore a=2, b=-1$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{11} \frac{n+4}{n^3+3n^2+2n} &= \sum_{n=1}^{11} \left\{ \frac{2}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{11} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \sum_{n=1}^{11} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} \right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{12} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{13} \right) \\ &= \frac{55}{39}\end{aligned}$$

となる。

(2)

$\triangle OAB$ の面積を S とすると、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3^2 \cdot 5^2 - 5^2} \\ &= 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。また、 P は $\triangle OAB$ の外心であることより、 OA, OB の中点をそれぞれ M, N とおくと、 $\overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{PN} \perp \overrightarrow{OB}$ であるから、

$$\begin{cases} \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \\ \overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \end{cases}$$

である。ここで、 $\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}, \overrightarrow{OB} \neq \vec{0}, \overrightarrow{OA} \nparallel \overrightarrow{OB}$ であるから、実数 a, b を用いて、

$$\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$$

と表せる。よって、

$$\begin{aligned}\begin{cases} \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \\ \overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}) \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \\ (\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP}) \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left\{ \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - (a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}) \right\} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \\ \left\{ \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - (a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}) \right\} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{2} - a \right) |\overrightarrow{OA}|^2 - b\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \\ \left(\frac{1}{2} - b \right) |\overrightarrow{OB}|^2 - a\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{2} - a \right) \cdot 3^2 - b \cdot 5 = 0 \\ \left(\frac{1}{2} - b \right) \cdot 5^2 - a \cdot 5 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 9a + 5b - \frac{9}{2} = 0 \\ a + 5b - \frac{5}{2} = 0 \end{cases} \\ \therefore a &= \frac{1}{4}, b = \frac{9}{20}\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{9}{20}\overrightarrow{OB}$$

である。

実数 t を用いて、 $t = 3^x$ とおく。また、 $3^x > 0$ であるから、 $t > 0$ である。このとき、与式は、

$$\begin{aligned} 9^x + 3 &= 2 \times 3^{x+1} - 10 \times 3^{-x} \\ \Leftrightarrow (3^x)^2 + 3 &= 2 \cdot 3 \cdot 3^x - \frac{10}{3^x} \\ \therefore t^2 + 3 &= 6t - \frac{10}{t} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $t > 0$ より、両辺に t をかけて、

$$\begin{aligned} t^3 + 3t &= 6t^2 - 10 \\ \Leftrightarrow t^3 - 6t^2 + 3t + 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t+1)(t-2)(t-5) &= 0 \\ \therefore t &= -1, 2, 5 \end{aligned}$$

となる。よって、 $t > 0$ より、

$$\begin{aligned} t &= 2, 5 \\ \Leftrightarrow 3^x &= 2, 5 \\ \therefore x &= \log_3 2, \log_3 5 \end{aligned}$$

が得られる。

(答) $x = \log_3 2, \log_3 5$

(1)

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より,

$$\cos^2 \theta = -2a \sin \theta + b$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 \theta = -2a \sin \theta + b$$

$$\therefore \sin^2 \theta - 2a \sin \theta + b - 1 = 0$$

となる。また、実数 t を用いて、 $t = \sin \theta$ とおくと、 t は $-1 \leq t \leq 1$ を満たすすべての値をとる。ここで、

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 - 2at + b - 1 \\ &= (t-a)^2 - a^2 + b - 1 \end{aligned}$$

とおくと、 $\cos^2 \theta = -2a \sin \theta + b$ が少なくとも1つの解をもつような点 (a, b) の範囲は、 $-1 \leq t \leq 1$ において $f(t) = 0$ が少なくとも1つの解をもつような点 (a, b) の範囲と一致する。

[1] $-1 \leq t \leq 1$ において相異なる2つの解または1つの重解を持つとき

$f(t) = 0$ の判別式を D とすると、点 (a, b) の範囲は、

$$\begin{cases} \frac{D}{4} \geq 0 \\ -1 \leq a \leq 1 \\ f(1) \geq 0 \\ f(-1) \geq 0 \end{cases}$$

である。よって、

$$\begin{cases} a^2 - (b-1) \geq 0 \\ -1 \leq a \leq 1 \\ b - 2a \geq 0 \\ b + 2a \geq 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} b \leq a^2 + 1 \\ -1 \leq a \leq 1 \\ b \geq 2a \\ b \geq -2a \end{cases}$$

となる。

[2] $f(1) \cdot f(-1) \leq 0$ のとき

点 (a, b) の範囲は、

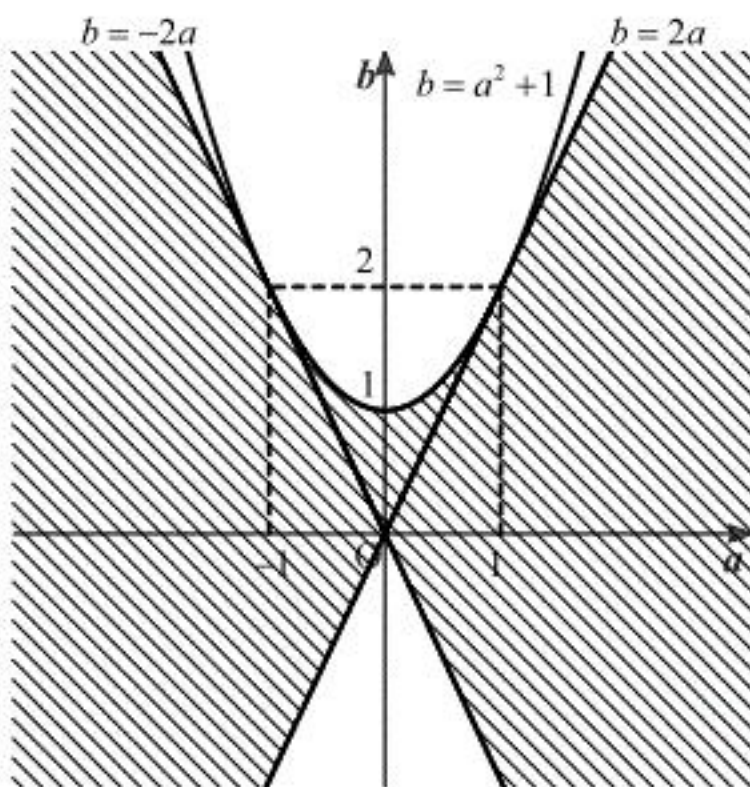
$$f(1) \cdot f(-1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (b-2a)(b+2a) \leq 0$$

$$\therefore \begin{cases} -2a \leq b \leq 2a & (a \geq 0 \text{ のとき}) \\ 2a \leq b \leq -2a & (a \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

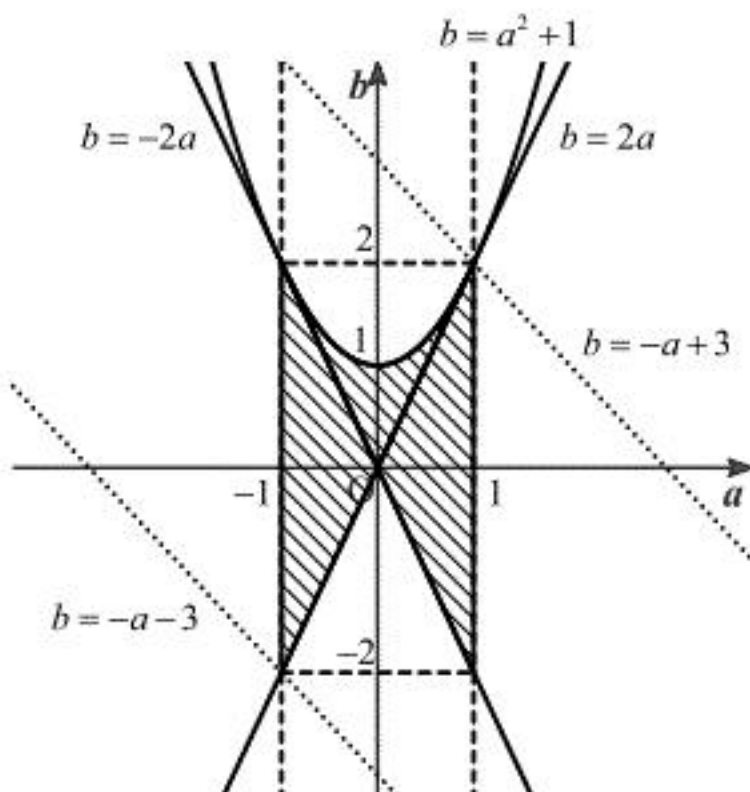
以上[1], [2]より、点 (a, b) の範囲は下図斜線部のようになる。(ただし、境界をすべて含む。)



(答) 前図 (ただし、境界をすべて含む。)

(2)

点 (a, b) が(1)で求めた範囲を動き、さらに $-1 \leq a \leq 1$ を満たすとき、点 (a, b) の領域は下図斜線部のようになる。(ただし、境界をすべて含む。)



ここで、実数 k を用いて、 $a+b=k$ とおくと、 $b = -a+k$ である。 k がとれる値の範囲は、 $b = -a+k$ が上図斜線部と共有点を持つような範囲であるから、 k の最大値は、図より、 $(1, 2)$ を通るときで、 $k = 1+2=3$ となる。また、 k の最小値は、図より、 $(-1, -2)$ を通るときで、 $k = -1+(-2)=-3$ となる。

(答) 最大値...3, 最小値...-3