

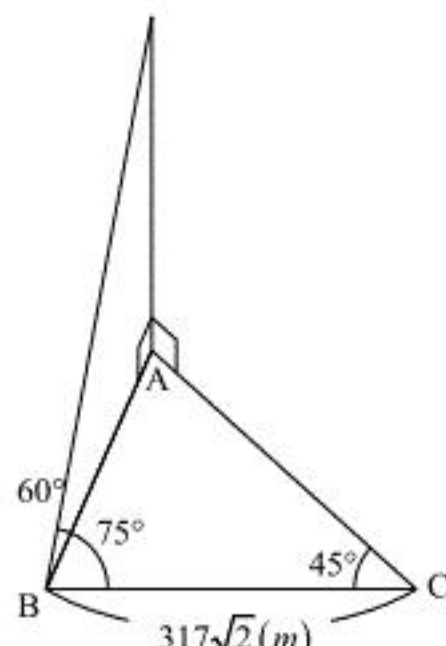
1

【解答】

(1)	ア	イ	ウ												
	6	3	4												
(2)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ				
	7	6	1	1	6	7	2	1	2	-	1				
(3)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ					
	7	1	8	2	2	2	7	1	8	7					
(4)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	
	3	1	-	2	-	1	2	4	2	6	1	2	2	1	

【解説】

(1)



△ABCにおいて、
 $\angle CAB = 180^\circ - \angle ABC - \angle BCA = 60^\circ$

である。正弦定理より、

$$\frac{BC}{\sin \angle CAB} = \frac{AB}{\sin \angle BCA}$$

が成立するから

$$\begin{aligned} AB &= \frac{\sin \angle BCA}{\sin \angle CAB} \cdot BC \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot 317\sqrt{2} \\ &= \frac{634}{\sqrt{3}} (m) \end{aligned}$$

となる。Bから塔の先端を見上げる角度は 60° であるから、塔の高さは

$$AB \cdot \tan 60^\circ = \frac{634}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 634 (m)$$

となる。

(2)

倍角の公式より、 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ であるから、

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\cos 2x + 2\sin^2 x - 2\sin x + 1 \\ &= 2(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin^2 x - 2\sin x + 1 \\ &= -2\sin^2 x - 2\sin x + 3 \\ &= -2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq x < 2\pi$ において、 $-1 \leq \sin x \leq 1$ となるから、最大値をとるのは、

$$\begin{aligned} \sin x &= -\frac{1}{2} \\ \therefore x &= \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \end{aligned}$$

のときであり、このとき最大値 $\frac{7}{2}$ をとる。また、最小値をとるのは、

$$\begin{aligned} \sin x &= 1 \\ \therefore x &= \frac{1}{2}\pi \end{aligned}$$

のときであり、このとき最小値

$$f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = -1$$

をとる。

(3)

$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{4}{3}$ のとき、

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \alpha &= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{2} \\ &= \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 1}{2} \\ &= \frac{7}{18} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha &= (\sin \alpha + \cos \alpha)^3 - 3(\sin \alpha + \cos \alpha) \sin \alpha \cos \alpha \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{18} \\ &= \frac{22}{27} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \\ &= \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \\ &= \frac{18}{7} \end{aligned}$$

となる。

(4) 1.

$$\begin{aligned} x &= \sin t + \cos t \text{ とすると、} \\ \sin 2t &= 2\sin t \cos t \\ &= (\sin t + \cos t)^2 - (\sin^2 t + \cos^2 t) \\ &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} f(t) &= 3\sin 2t + R(\sin t + \cos t) + 1 \\ &= 3(x^2 - 1) + Rx + 1 \\ &= 3x^2 + Rx - 2 \end{aligned}$$

となる。よって、 $3x^2 + Rx - 2 = ax^2 + bRx + c$ より、

$$a = 3, b = 1, c = -2$$

である。

2.

$$x = \sin t + \cos t = \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

であり、 $0 \leq t \leq \pi$ において、 $\frac{\pi}{4} \leq t + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi$ であり、 $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ となる。よって、

$$-1 \leq x \leq \sqrt{2}$$

となる。

3.

$$\begin{aligned} g(x) &= 3x^2 + Rx - 2 \\ &= 3\left(x + \frac{R}{6}\right)^2 - 2 - \frac{R^2}{12} \end{aligned}$$

となる。 $y = g(x)$ のグラフは下に凸な放物線であり、 $R > 0$ より $-\frac{R}{6} < 0$ であるから、

$f(t) = g(x)$ は $x = \sqrt{2}$ のときに最大値をとる。よって、 $f(t)$ の最大値は

$$g(\sqrt{2}) = 3 \cdot 2 + \sqrt{2}R - 2 = 4 + \sqrt{2}R$$

となる。

4.

$y = g(x)$ のグラフの軸は直線 $x = -\frac{R}{6}$ である。 $R > 0$ であり、定義域は3より $-1 \leq x \leq \sqrt{2}$ で

あるから、 $-1 < -\frac{R}{6} < 0$ のとき $g(x)$ は $x = -\frac{R}{6}$ で、 $-\frac{R}{6} < 1$ のとき $g(x)$ は $x = 1$ で最小値をとる。

したがって、 $f(t)$ の最小値は $0 < R < 6$ のとき $-\frac{R^2}{12} - 2$ となる。また、 $R > 6$ のとき、

$$\begin{aligned} g(-1) &= 3 \cdot (-1)^2 + R \cdot (-1) - 2 \\ &= 1 - R \end{aligned}$$

となる。

Ⅱ

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ					
	5	2	3	6	4	0					
(2)	ア	イ	ウ	エ	オ						
	2	8	0	7	0						
(3)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	
	2	3	1	3	2	3	4	9	3	6	

【解説】

(1)
2の倍数となるための必要十分条件は一の位の数が0, 2, 4となることである。一の位の数
が0のとき、百の位の数、十の位の数
の選び方は ${}_5P_2$ 通りあるため、

$$5 \cdot 4 = 20 \text{ (個)}$$

できる。また、一の位の数
が2または4のとき、百の位の数
の選び方は4通り、十の位の数
の選び方は4通りあるため、それぞれ

$$4 \cdot 4 = 16 \text{ (個)}$$

できる。以上より、2の倍数は

$$20 + 16 \cdot 2 = 52 \text{ (個)}$$

できる。また、5の倍数となるための必要十分条件は、一の位の数
が0, 5となることである。
一の位の数
が0のとき、20個できる。また、一の位の数
が5のとき、百の位の数
の選び方は4通り、十の位の数
の選び方は4通りあるため、

$$4 \cdot 4 = 16 \text{ (個)}$$

できる。以上より、5の倍数は

$$20 + 16 = 36 \text{ (個)}$$

できる。また、3の倍数となるための必要十分条件は、各位の和
が3の倍数となることである。
各位の和
が3の倍数となる数の組み合わせは、

$$(0, 1, 2), (0, 1, 5), (0, 2, 4), (0, 4, 5), (1, 2, 3), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (3, 4, 5)$$

である。 $(0, 1, 2), (0, 1, 5), (0, 2, 4), (0, 4, 5)$ のときは、百の位の数
の選び方は2通り、十の位
の数
の選び方は2通りあるため、それぞれ

$$2 \cdot 2 = 4 \text{ (個)}$$

できる。また、 $(1, 2, 3), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (3, 4, 5)$ のときは、百の位の数
の選び方は3通り、十
の位の数
の選び方は2通りあるため、それぞれ

$$3 \cdot 2 = 6 \text{ (個)}$$

できる。以上より、3の倍数は、

$$4 \cdot 4 + 6 \cdot 4 = 40 \text{ (個)}$$

できる。

(2)

8枚のカードを3枚、3枚、2枚に分けると、3枚の組は2組あるが、これらは区別しないので、

$$\frac{{}_8C_3 \cdot {}_5C_3}{2} = \frac{56 \cdot 10}{2} = 280 \text{ (通り)}$$

ある。このうち、1番と2番のカードが同じ組になるのは、3枚の組に入れる場合は、同じ組
の残りの1枚を決めて、さらに2枚の組のカードを決めればよく、

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_2 = 6 \cdot 10 = 60 \text{ (通り)}$$

ある。2枚の組に入れる場合は、3枚の組を2組決めるが、これらは区別しないので、

$$\frac{{}_6C_3}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ (通り)}$$

ある。以上より、1番と2番のカードが同じ組になるのは

$$60 + 10 = 70 \text{ (通り)}$$

ある。

(3) 1.

$m = 20, n = 10$ のとき、最初に取り出した球が白となる確率は、

$$\frac{20}{20 + 10} = \frac{2}{3}$$

となる。1個目の色、2個目の色、3個目の色を(白、白、青)のように表すこととする。(白、白、

青)となる確率は $\frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29} \cdot \frac{10}{28}$ 、(白、青、青)となる確率は $\frac{20}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{9}{28}$ 、(青、白、青)となる確率は

$\frac{10}{30} \cdot \frac{20}{29} \cdot \frac{9}{28}$ 、(青、青、青)となる確率は $\frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} \cdot \frac{8}{28}$ である。これらは同時には起こらないので、

3番目に取り出した球が青となる事象の確率は、

$$\begin{aligned} \frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29} \cdot \frac{10}{28} + \frac{20}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{9}{28} + \frac{10}{30} \cdot \frac{20}{29} \cdot \frac{9}{28} + \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} \cdot \frac{8}{28} &= \frac{10 \cdot (20 \cdot 19 + 20 \cdot 9 + 20 \cdot 9 + 9 \cdot 8)}{30 \cdot 29 \cdot 28} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。

2.

$m = 4, n = 6$ で、最初に取り出した球が白だったとき、2個目の球が青となる確率は、

$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

であり、最初に取り出した球が白であり、かつ2個目の球が青となる確率は、

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$$

である。また、最初に取り出した球が青であり、かつ2個目の球が青となる確率は、

$$\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$$

である。以上より、2個目の色が青だったとき、1個目が白である確率は、

$$\frac{\frac{4}{15}}{\frac{4}{15} + \frac{1}{3}} = \frac{4}{9}$$

である。

3.

$n = 0, 9$ のとき、2つの球の色は必ず一致するので不適である。 $1 \leq n \leq 8$ のとき、2つの球が
同色となる確率は、

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{9 \cdot 8} + \frac{(9-n)(8-n)}{9 \cdot 8} &= \frac{2n^2 - 18n + 72}{72} \\ &= \frac{n^2 - 9n + 36}{36} \end{aligned}$$

となる。したがって、箱から取り出した2つの球が同色となる確率が $\frac{1}{2}$ となるとき、

$$\begin{aligned} \frac{n^2 - 9n + 36}{36} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow n^2 - 9n + 18 &= 0 \\ \Leftrightarrow (n-3)(n-6) &= 0 \\ \Leftrightarrow n &= 3, 6 \end{aligned}$$

である。よって、 $n = 3, 6$ のときに題意を満たす。

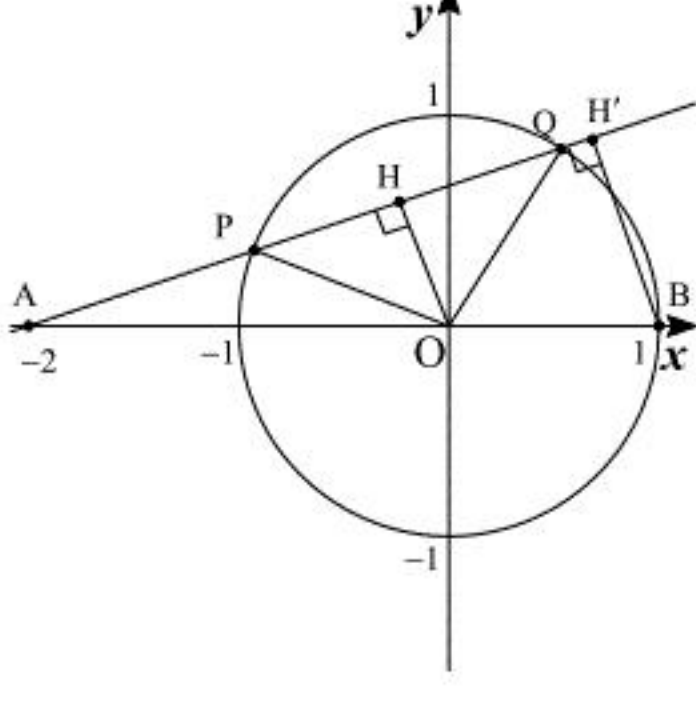
Ⅲ

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク			
	1	2	9	0	3	4	4	5			
(2)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ				
	－	1	3	3	2	1	2				
(3)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	
	3	4	7	5	3	4	3	1	3	9	

【解説】

(1)



上図のように点 O, B から直線 AP に下ろした垂線の足をそれぞれ H, H' と定める。
 $\angle HOP = \theta$ とすると、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ である。また、 $\triangle OPQ$ は $OP = OQ = 1$ の二等辺三角形であるから、その面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot PQ \cdot OH = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

となる。よって、 $0^\circ < 2\theta < 180^\circ$ より $0 < \frac{1}{2} \sin 2\theta \leq \frac{1}{2}$ であるから、最大値は $\frac{1}{2}$ であり、そのとき、

$$\sin 2\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 45^\circ (\because 0^\circ < \theta < 90^\circ)$$

である。また、 $\triangle OPQ$ は $OP = OQ = 1$ の二等辺三角形であるから、

$$\angle POQ = 2\theta = 90^\circ$$

である。さらに、 $\triangle AH'B$ と $\triangle AHO$ について、

$$\angle AH'B = \angle AHO, \angle BAH' = \angle OAH$$

であるから、2組の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle AH'B \sim \triangle AHO$ となる。よって、

$$BH' : OH = AB : AO = 3 : 2$$

となり、 $\triangle BPQ$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot PQ \cdot BH' = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \theta \cdot \frac{3}{2} \cos \theta = \frac{3}{4} \sin 2\theta$$

となる。よって、 $0^\circ < 2\theta < 180^\circ$ より $0 < \frac{1}{2} \sin 2\theta \leq \frac{1}{2}$ であるから、最大値は $\frac{3}{4}$ であり、そのとき、

$$\sin 2\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 45^\circ (\because 0^\circ < \theta < 90^\circ)$$

である。つまり $\angle POQ = 90^\circ$ であり、円周角の定理より、

$$\begin{aligned} \angle PBQ &= \frac{1}{2} \angle POQ \\ &= 45^\circ \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= 2 \int_0^1 (ax^2 + c) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} ax^3 + cx \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} a + 2c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} uf(s) + vf(1) &= u(as^2 + bs + c) + v(a + b + c) \\ &= (us^2 + v)a + (us + v)b + (u + v)c \end{aligned}$$

より、与えられた等式は $\frac{2}{3}a + 2c = (us^2 + v)a + (us + v)b + (u + v)c$ と変形できる。これは a, b, c についての恒等式であるため、

$$\begin{cases} us^2 + v = \frac{2}{3} & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ us + v = 0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ u + v = 2 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

が成り立つ。②より、 $v = -us$ であるから、これを①、③に代入して、

$$\begin{cases} us^2 - us = \frac{2}{3} & \cdots \cdots \textcircled{1}' \\ u - us = 2 & \cdots \cdots \textcircled{3}' \end{cases}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} -s(u - us) &= \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow -2s &= \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow s &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。これを③' に代入して、

$$u - \left(-\frac{1}{3}u\right) = 2 \Leftrightarrow u = \frac{3}{2}$$

となる。これと③より、

$$v = 2 - u = \frac{1}{2}$$

となる。

(3) 1.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \Leftrightarrow x(x^2 - 5x + 7 - a) &= 0 \end{aligned}$$

となるので、方程式 $f(x) = g(x)$ が異なる3つの実数解をもつとき、方程式 $x^2 - 5x + 7 - a = 0$ は異なる2つの正の実数解を持つ。 $h(x) = x^2 - 5x + 7 - a$ とし、 $h(x) = 0$ の判別式を D とする。

$h(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} - a$ より、 $h(x)$ が異なる2つの正の実数解を持つための必要十分条件は、

$$\begin{cases} D > 0 \\ h(0) > 0 \\ \frac{5}{2} > 0 \end{cases}$$

が成り立つことである。

$$\begin{aligned} D &> 0 \\ \Leftrightarrow 5^2 - 4(7 - a) &> 0 \\ \Leftrightarrow -3 + 4a &> 0 \\ \Leftrightarrow a &> \frac{3}{4} \\ h(0) &> 0 \\ \Leftrightarrow 7 - a &> 0 \\ \Leftrightarrow a &< 7 \end{aligned}$$

より、求める条件は $\frac{3}{4} < a < 7$ である。

2.

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= i(x) \text{ とすると、} \\ i(x) &= x^3 - 5x^2 + (7 - a)x \\ i'(x) &= 3x^2 - 10x + 7 - a \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} i'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 3(7 - a)}}{3} = \frac{5 \pm \sqrt{3a + 4}}{3} \end{aligned}$$

であり、 $\frac{3}{4} < a < 7$ より、 $i(x)$ の増減表は下図のようになる。

x	0	...	$\frac{5 - \sqrt{3a + 4}}{3}$	...	$\frac{5 + \sqrt{3a + 4}}{3}$	...	β
$i'(x)$		+	0	-	0	+	
$i(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	0

したがって、関数 $f(x) - g(x) = i(x)$ は $0 \leq x \leq \beta$ の区間で $x = \frac{5 + \sqrt{3a + 4}}{3}$ において最大値また

は最小値をとる。

3.

$i'(x) = 0$ の解を $x = s, t$ (s, t は $s < t$ をみたす実数) とすると、2. の増減表より、

$$i(t) < 0 < i(s)$$

となるため、 $i(s) + i(t) = 0$ となるときを考える。ここで、

$$\begin{aligned} x^3 - 5x^2 + (7 - a)x &= (3x^2 - 10x + 7 - a) \left(\frac{1}{3}x - \frac{5}{9} \right) - \frac{6a + 8}{9}x + \frac{35 - 5a}{9} \\ \Leftrightarrow i(x) &= i'(x) \left(\frac{1}{3}x - \frac{5}{9} \right) - \frac{6a + 8}{9}x + \frac{35 - 5a}{9} \end{aligned}$$

となることから、

$$i(s) + i(t) = -\frac{6a + 8}{9}(s + t) + \frac{35 - 5a}{9} \cdot 2$$

となる。2. より、 $s + t = \frac{10}{3}$ であるから、

$$\begin{aligned} i(s) + i(t) &= -\frac{6a + 8}{9} \cdot \frac{10}{3} + \frac{70 - 10a}{9} \\ &= \frac{-90a + 130}{27} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $i(s) + i(t) = 0$ となるのは、

$$\frac{-90a + 130}{27} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{13}{9}$$

のときである。

IV

(1)

$$\begin{aligned}\frac{Y_2}{X_2} - \frac{Y_1}{X_1} &= \frac{X_1 Y_2 - X_2 Y_1}{X_1 X_2} \\ &= \frac{x_1(y_1 + y_2) - (x_1 + x_2)y_1}{X_1 X_2} \\ &= \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{X_1 X_2}\end{aligned}$$

である。ここで、

$$\frac{y_n}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} \quad \dots \textcircled{1}$$

に $n=1$ を代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{y_1}{x_1} &\leq \frac{y_2}{x_2} \\ \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 &\geq 0 \quad (\because x_1 > 0, x_2 > 0)\end{aligned}$$

であり、 $X_2 > X_1 > 0$ である。したがって、

$$\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{X_1 X_2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{Y_1}{X_1} \leq \frac{Y_2}{X_2}$$

となり、示された。

(証明終)

(2)

数学的帰納法を利用して、 $\frac{Y_n}{X_n} \leq \frac{y_n}{x_n}$ であることを示す。

[1] $n=1$ のとき $\frac{Y_1}{X_1} = \frac{y_1}{x_1}$ より、 $\frac{Y_n}{X_n} \leq \frac{y_n}{x_n}$ は成り立つ。

[2] k を自然数として、 $n=k$ のとき

$$\frac{Y_k}{X_k} \leq \frac{y_k}{x_k} \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つと仮定する。ここで、

$$\begin{aligned}\frac{y_{k+1}}{x_{k+1}} - \frac{Y_{k+1}}{X_{k+1}} &= \frac{X_{k+1} y_{k+1} - x_{k+1} Y_{k+1}}{x_{k+1} X_{k+1}} \\ &= \frac{(X_k + x_{k+1}) y_{k+1} - x_{k+1} (Y_k + y_{k+1})}{x_{k+1} X_{k+1}} \\ &= \frac{X_k y_{k+1} - x_{k+1} Y_k}{x_{k+1} X_{k+1}}\end{aligned}$$

となる。①に $n=k$ を代入すると、

$$\frac{y_k}{x_k} \leq \frac{Y_{k+1}}{x_{k+1}}$$

である。これと②より、

$$\frac{Y_k}{X_k} \leq \frac{y_k}{x_k} \leq \frac{y_{k+1}}{x_{k+1}}$$

となる。 $\frac{Y_k}{X_k} \leq \frac{y_{k+1}}{x_{k+1}}$, $x_{k+1} > 0$, $X_k > 0$ より、

$$X_k y_{k+1} - x_{k+1} Y_k \geq 0$$

となる。よって、 $x_{k+1} > 0$, $X_{k+1} > 0$ から、

$$\frac{X_k y_{k+1} - x_{k+1} Y_k}{x_{k+1} X_{k+1}} \geq 0$$

であり、 $\frac{y_{k+1}}{x_{k+1}} - \frac{Y_{k+1}}{X_{k+1}} \geq 0$ となる。よって、 $n=k+1$ のときでも成り立つ。

以上、[1], [2]より数学的帰納法から題意が示された。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned}\frac{Y_{n+1}}{X_{n+1}} - \frac{Y_n}{X_n} &= \frac{X_n Y_{n+1} - X_{n+1} Y_n}{X_{n+1} X_n} \\ &= \frac{X_n (Y_n + y_{n+1}) - (X_n + x_{n+1}) Y_n}{X_{n+1} X_n} \\ &= \frac{X_n y_{n+1} - x_{n+1} Y_n}{X_{n+1} X_n}\end{aligned}$$

である。(2), ①より、

$$\frac{Y_n}{X_n} \leq \frac{y_n}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}$$

となる。 $\frac{Y_n}{X_n} \leq \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}$, $x_{n+1} > 0$, $X_n > 0$ より

$$X_n y_{n+1} - x_{n+1} Y_n \geq 0$$

となる。よって、 $X_n > 0$, $X_{n+1} > 0$ から、

$$\frac{X_n y_{n+1} - x_{n+1} Y_n}{X_{n+1} X_n} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{Y_n}{X_n} \leq \frac{Y_{n+1}}{X_{n+1}}$$

が示された。

(証明終)