

〔解答〕

(1)	1	2	
	1	2	
(2)	3	4	5
	1	0	0
(3)	6	7	8
	1	1	4

〔解説〕

(1)

真数条件より $x > 0$ かつ $x+6 > 0$ であり、これらの共通範囲は $x > 0$ である。 $\log_4(x+6)$ の底を変換すると

$$\log_4(x+6) = \frac{\log_2(x+6)}{\log_2 4} = \frac{1}{2} \log_2(x+6)$$

となるので、与式の左辺は

$$\begin{aligned} \log_2 x - \log_4(x+6) &= \frac{1}{2} \{2 \log_2 x - \log_2(x+6)\} \\ &= \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{x^2}{x+6} \right) \end{aligned}$$

と変形できる。よって

$$\begin{aligned} \log_2 x - \log_4(x+6) &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{x^2}{x+6} \right) &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{x^2}{x+6} \right) &= \log_2 8 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+6} &= 8 \\ \Leftrightarrow x^2 - 8x - 48 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-12)(x+4) &= 0 \\ \therefore x &= 12 \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

となる。

(2)

男子が2人以上、女子が1人以上となる選び方は、男子を2人、女子を2人選ぶ場合と男子を3人、女子を1人選ぶ場合が考えられ、これらは互いに排反である。男子から2人、女子から2人代表を選出する場合は

$${}_5C_2 \cdot {}_4C_2 = 10 \cdot 6 = 60$$

より60通りの選び方がある。また、男子から3人、女子から1人代表を選出する場合は

$${}_5C_3 \cdot {}_4C_1 = 10 \cdot 4 = 40$$

より40通りの選び方がある。よって、求める選び方は $60 + 40 = 100$ 通りになる。

(3)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}t + \frac{3}{4}t^2 \right) dt &= \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{4}t^3 \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{5}{3} - \left(-\frac{13}{12} \right) \\ &= \frac{11}{4} \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

(a)	9
	1
(b)	10
	0
(c)	11
	1
(d)	12
	0

〔解説〕

(a)

すべての3直線が平行な時、直径の長さが直線どうしの距離をすべて超える円を考えると、この円は3直線すべてと共有点を持つことができる。3直線のなかに平行でない2直線がある場合は、3直線は2個または3個の交点を持つが、これらの交点をすべて通るように円をとると、この円は3直線すべてと共有点を持つ円となる。以上よりこの命題は真である。

(b)

3点 $(0, 0)$, $(0, 100)$, $(100, 0)$ を中心とする半径1の円を考えると、これら3つの円すべてと共有点を持つ直線をとることはできない。よって、この命題は偽である。

(c)

2直線が平行であるときは、直線 l と共有点をもち、直径の長さが直線間の距離よりも小さい円を考えると、この円は直線 l と共有点をもつが直線 m とは共有点をもたない。2直線が平行でないとき2直線は交点をもつが、直線 l 上にこの交点とは異なる点 A をとり、この点 A を中心として半径が点 A と直線 m との距離より小さい円を考えれば、この円は l と共有点をもつが直線 m とは共有点をもたない。以上よりこの命題は真である。

(d)

円 A が円 B の内部に存在する円であるとする、円 A と共有点を持つ直線は円 B と必ず共有点を持つ。よって、この命題は偽である。

Ⅲ

〔解答〕

(1)	13	14	15	16	17						
	1	2	－	2	1						
(2)	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
	1	2	7	1	7	4	7	1	7	4	4

〔解説〕

(1)

$y=f(x)$ の x^2 の係数が a であることと頂点が点 $(2, -1)$ であることから, $f(x)$ は

$$f(x)=a(x-2)^2-1$$

と表すことができる. $y=f(x)$ は点 $(0, 1)$ を通るので

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ \Leftrightarrow (0-2)^2 a - 1 &= 1 \\ \Leftrightarrow 4a &= 2 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である. これを $f(x)=a(x-2)^2-1$ に代入すると

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-2)^2 - 1 \\ \Leftrightarrow f(x) &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

が得られる. これと

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

の係数を比較することで $b=-2, c=1$ が得られる.

(2)

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+1$ のとき, $f(x) \geq 0$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 &\geq 0 \\ \therefore x &\leq 2 - \sqrt{2}, \quad 2 + \sqrt{2} \leq x \end{aligned}$$

となる. 一方, $f(x) < 0$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 &< 0 \\ \therefore 2 - \sqrt{2} &< x < 2 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる. よって, $|f(x)| \leq \frac{x}{4}$ は

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \leq \frac{x}{4} & (x \leq 2 - \sqrt{2}, \quad 2 + \sqrt{2} \leq x \text{ のとき}) & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ -\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1\right) \leq \frac{x}{4} & (2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2} \text{ のとき}) & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

となる. ①を解くと

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 &\leq \frac{x}{4} \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 4 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (2x-1)(x-4) &\leq 0 \\ \therefore \frac{1}{2} &\leq x \leq 4 \end{aligned}$$

となり, $x \leq 2 - \sqrt{2}, \quad 2 + \sqrt{2} \leq x$ との共通範囲より

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 2 - \sqrt{2}, \quad 2 + \sqrt{2} \leq x \leq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

が得られる. 次に, ②を解くと

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1\right) &< \frac{x}{4} \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 4 &> 0 \\ \Leftrightarrow x &< \frac{7 - \sqrt{17}}{4}, \quad \frac{7 + \sqrt{17}}{4} < x \end{aligned}$$

となり, $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$ との共通範囲より

$$2 - \sqrt{2} < x < \frac{7 - \sqrt{17}}{4}, \quad \frac{7 + \sqrt{17}}{4} < x < 2 + \sqrt{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

が得られる. よって, $|f(x)| \leq \frac{x}{4}$ の解は③, ④より

$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7 - \sqrt{17}}{4}, \quad \frac{7 + \sqrt{17}}{4} \leq x \leq 4$$

となる.

〔解答〕

29	30	31	32	33	34	35	36	37
2	-	3	-	3	6	-	2	0

〔解説〕

$g(x)$ は 3 次関数なので $a \neq 0$ である。 $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ より $g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ となる。 $x = -2, 3$ で極値をとるので $g'(x) = 0$ の解は $x = -2, 3$ であり、 $g'(x)$ の x^2 の係数が $3a$ であることから

$$g'(x) = 3a(x+2)(x-3)$$

と $g'(x)$ を表すことができる。ここで、 $\int_{\alpha}^{\beta} g'(x) dx = g(\beta) - g(\alpha)$ であるから

$$\int_{-2}^3 3a(x-3)(x+2) dt = g(3) - g(-2)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3a}{6} \{3 - (-2)\}^3 = -101 - 24$$

$$\Leftrightarrow -\frac{125}{2}a = -125$$

$$\Leftrightarrow a = 2$$

となり、これは $a \neq 0$ をみたす。また、

$$g'(x) = 3a(x+2)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = 6x^2 - 6x - 36$$

であるから、 $g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ と各係数を比較して、 $b = -3, c = -36$ が得られる。さらに、

$$g(3) = -101, a = 2, b = -3, c = -36 \text{ より}$$

$$g(3) = -101$$

$$\Leftrightarrow 27a + 9b + 3c + d = -101$$

$$\Leftrightarrow d - 81 = -101$$

$$\Leftrightarrow d = -20$$

が得られる。