

〔解答〕

(1)	1	2	3	4	
	2	2	6	3	
(2)	5	6	7	8	9
	-	3	2	0	6
(3)	10	11	12	13	
	1	2	0	3	

〔解説〕

(1)

 $g(x)$ を $f(x)$ で割ると、

$$\begin{array}{r}
 x-2 \\
 x^2-(a-1)x+a \overline{) x^3-(a+1)x^2+(5a-8)x-5a} \\
 \underline{x^3-(a-1)x^2+ \quad ax} \\
 -2x^2+(4a-8)x-5a \\
 \underline{-2x^2+(2a-2)x-2a} \\
 (2a-6)x-3a
 \end{array}$$

となる。したがって $g(x)$ を $f(x)$ で割った商は $x-2$ であり、余りは $(2a-6)x-3a$ であるから、

$$g(x) = (x-2)f(x) + (2a-6)x - 3a \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。

(2)

$f(x)=0$ と $g(x)=0$ の共通解を p とすると、 $f(p)=0$ より、

$$p^2 - (a-1)p + a = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。また、 $g(p)=0$ より、①に $x=p$ を代入した式は、

$$g(p) = (p-2)f(p) + (2a-6)p - 3a$$

$$\Leftrightarrow 0 = (2a-6)p - 3a$$

$$\Leftrightarrow (2a-6)p = 3a \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。②の両辺に $(2a-6)^2$ をかけると

$$(2a-6)^2 p^2 - (a-1)(2a-6)^2 p + a(2a-6)^2 = 0$$

となるから、これに③を代入し、変形すれば

$$(3a)^2 - (a-1)(2a-6)(3a) + a(2a-6)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a\{9a - 3(a-1)(2a-6) + (2a-6)^2\} = 0$$

$$\Leftrightarrow a(2a^2 - 9a - 18) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(a-6)(2a+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}, 0, 6$$

が得られる。

(3)

$a = -\frac{3}{2}$ のとき、これを③式に代入すると、

$$\left\{2\left(-\frac{3}{2}\right) - 6\right\}p = 3\left(-\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$$

となるから、共通の解 p は $\frac{1}{2}$ である。同様に、 $a=0$ のとき、 p は

$$-6p = 0 \Leftrightarrow p = 0$$

であり、 $a=6$ のとき、 p は

$$(2 \cdot 6 - 6)p = 3 \cdot 6 \Leftrightarrow p = 3$$

である。

[解答]

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	3	6	5	3	6	2	9	1	4

[解説]

さいころを3回投げた時の目の出方の総数は、 $6^3 = 216$ 通りであり、これらは同様に確からしく起こる。

まず、 $M - m = 0$ ときの目の出方を考える。 $M - m = 0$ となるのは、3回とも同じ目が出たときである。目の出方は6通りであるから、その確率は、 $\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$ である。

以下、 $n = 1, 2, 3$ に対し、 n 回目に出た目を a_n とする。 $M - m = 1$ となる時の目の出方を考える。このとき、 m, M の組み合わせは、 $(m, M) = (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)$ の5通りである。また、 a_1, a_2, a_3 の組み合わせは、

$$(a_1, a_2, a_3) = (m, m, M), (m, M, M) \text{ またはその並び替え}$$

である。並び替え方はそれぞれ ${}_3C_1 = 3$ 通りあるから、全部で6通りである。以上より、

$$M - m = 1 \text{ となる確率は、} \frac{5 \cdot 6}{216} = \frac{5}{36} \text{ となる。}$$

次に、 $M - m = 2$ となる時の目の出方を考える。このとき、 m, M の組み合わせは、 $(m, M) = (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)$ の4通りである。また、 a_1, a_2, a_3 の組み合わせは、

$$(a_1, a_2, a_3) = (m, m, M), (m, m+1, M), (m, M, M) \text{ またはその並び替え}$$

である。並び替え方は $(m, m, M), (m, M, M)$ については3通り、 $(m, m+1, M)$ については

$$3! = 6 \text{ 通りあるから、全部で12通りである。以上より、} M - m = 2 \text{ となる確率は、} \frac{4 \cdot 12}{216} = \frac{2}{9} \text{ と}$$

なる。

最後に、 $M - m = 3$ となる時の目の出方を考える。このとき、 m, M の組み合わせは、 $(m, M) = (1, 4), (2, 5), (3, 6)$ の3通りである。また、 a_1, a_2, a_3 の組み合わせは、

$$(a_1, a_2, a_3) = (m, m, M), (m, m+1, M), (m, m+2, M), (m, M, M)$$

またはその並び替え

である。並び替え方は $(m, m, M), (m, M, M)$ については3通り、 $(m, m+1, M), (m, m+2, M)$ については6通りあるから、全部で18通りである。以上より、 $M - m = 3$ となる確率は、

$$\frac{3 \cdot 18}{216} = \frac{1}{4} \text{ となる。}$$

(1)

まず、 a_2 について考える。一番右のますが赤である塗り方は、左から順に

(赤赤), (青赤), (黄赤)

となる場合の3通りである。したがって、 $a_2=3$ である。

次に、 b_2 について考える。一番右のますが青である塗り方は、左から順に

(赤青), (黄青)

となる場合の2通りである。したがって、 $b_2=2$ である。

次に、 a_3 について考える。一番右のますが赤である塗り方は、左から順に

(赤赤赤), (青赤赤), (黄赤赤), (赤青赤), (赤黄赤), (青黄赤), (黄青赤)

となる場合の7通りである。したがって、 $a_3=7$ である。

最後に、 b_3 について考える。一番右のますが青である塗り方は、左から順に

(赤赤青), (青赤青), (黄赤青), (赤黄青), (青黄青)

となる場合の5通りである。したがって、 $b_3=5$ である。

(答) $a_2=3, b_2=2, a_3=7, b_3=5$

(2)

ますが $n+1$ 個あるときを考える。左から $n+1$ 個目のますに赤を塗るとき、左から n 個目のますは、赤、青、黄のいずれもあり得る。よって、このとき以下のように場合分けできる。

左から n 個目のますが赤のとき。これは a_n 通りある。

左から n 個目のますが青のとき。これは b_n 通りある。

左から n 個目のますが黄のとき。これは b_n 通りある。

これらは互いに排反だから、 $a_{n+1}=a_n+b_n+b_n=a_n+2b_n$ となる。

左から $n+1$ 個目のますに青を塗るとき、左から n 個目のますは、赤、黄のいずれかである。よって、このとき以下のように場合分けできる。

左から n 個目のますが赤のとき。これは a_n 通りである。

左から n 個目のますが黄のとき。これは b_n 通りである。

これらは互いに排反だから、 $b_{n+1}=a_n+b_n$ となる。

(答) $a_{n+1}=a_n+2b_n, b_{n+1}=a_n+b_n$

(3)

$\{c_n\}$ が等比数列となるには、 $c_1c_3=c_2^2$ となる必要がある。いま、 $a_1=b_1=1$ および(1)の結果より、

$$c_1=a_1+kb_1=1+k$$

$$c_2=a_2+kb_2=3+2k$$

$$c_3=a_3+kb_3=7+5k$$

が成り立つから、

$$c_1c_3=c_2^2$$

$$\Leftrightarrow (1+k)(7+5k)=(3+2k)^2$$

$$\Leftrightarrow 5k^2+12k+7=4k^2+12k+9$$

$$\Leftrightarrow k^2=2$$

$$\therefore k=\pm\sqrt{2}$$

となる。逆に、 $k=\pm\sqrt{2}$ のとき、(2)の結果より、

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= a_{n+1} \pm \sqrt{2}b_{n+1} \\ &= a_n + 2b_n \pm \sqrt{2}(a_n + b_n) \\ &= (1 \pm \sqrt{2})a_n + (2 \pm \sqrt{2})b_n \\ &= (1 \pm \sqrt{2})(a_n \pm \sqrt{2}b_n) \\ &= (1 \pm \sqrt{2})c_n \end{aligned}$$

が成り立つ(複号同順)から、 $\{c_n\}$ は公比 $1 \pm \sqrt{2}$ の等比数列である。以上より、 $\{c_n\}$ が等比数列となる k の値は $\pm\sqrt{2}$ であり、そのときの $\{c_n\}$ の公比は $1 \pm \sqrt{2}$ である(複号同順)。

(答) $k=\pm\sqrt{2}$ 、このとき $\{c_n\}$ の公比は $1 \pm \sqrt{2}$ (複号同順)

(4)

(3)の結果より、数列 $\{a_n \pm \sqrt{2}b_n\}$ は初項 $a_1 \pm \sqrt{2}b_1 = 1 \pm \sqrt{2}$ 、公比 $1 \pm \sqrt{2}$ の等比数列である。よって

$$a_n \pm \sqrt{2}b_n = (1 \pm \sqrt{2})(1 \pm \sqrt{2})^{n-1} = (1 \pm \sqrt{2})^n$$

が成り立つ(複号同順)。すなわち、

$$\begin{cases} a_n + \sqrt{2}b_n = (1 + \sqrt{2})^n & \dots\dots ① \\ a_n - \sqrt{2}b_n = (1 - \sqrt{2})^n & \dots\dots ② \end{cases}$$

である。①+②より、

$$\begin{aligned} 2a_n &= (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \\ \therefore a_n &= \frac{(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n}{2} \end{aligned}$$

が得られる。また、①-②より、

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}b_n &= (1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \\ \therefore b_n &= \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

が得られる。

$$(答) \ a_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n}{2}, \ b_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \ (n=1, 2, 3, \dots)$$

4

(1)

曲線 C と直線 ℓ の式,

$$y = 1 - x^2$$

$$y = -x + t$$

・・・①

から y を消去すると

$$1 - x^2 = -x + t$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + t - 1 = 0$$

・・・②

が得られる。曲線 C と直線 ℓ が接するとき②式は重解をもつから、②式の判別式を D とすると、 $D = 0$ である。

$$D = (-1)^2 - 4(t-1) = 5 - 4t$$

であるから、求める t の値は、 $5 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{4}$ である。

(答) $t = \frac{5}{4}$

(2)

曲線 C と直線 ℓ が異なる 2 点で交わる時、②の判別式 D は正だから、 $5 - 4t > 0 \Leftrightarrow t < \frac{5}{4}$ で

ある。この 2 交点の x 座標を a, b ($a < b$) とおくと、 a, b は②の解であるから、

$$a = \frac{1 - \sqrt{D}}{2}, b = \frac{1 + \sqrt{D}}{2}$$

が成り立つ。また、交点は ℓ 上にあるから、2 交点の座標は $(a, -a + t), (b, -b + t)$ である。以上より、交点間の距離を d とおくと、

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(a-b)^2 + \{(-a+t) - (-b+t)\}^2} \\ &= \sqrt{2(b-a)^2} \\ &= \sqrt{2\left(\frac{1+\sqrt{D}}{2} - \frac{1-\sqrt{D}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{2D} \\ &= \sqrt{2(5-4t)} \end{aligned}$$

となる。ただし、 $t > 0$ かつ $t < \frac{5}{4}$ より $0 < t < \frac{5}{4}$ である。

(答) $\sqrt{2(5-4t)} \left(0 < t < \frac{5}{4}\right)$

(3)

直線 $\ell: x + y - t = 0$ と原点との距離を h とする。 $t > 0$ より、 h は

$$h = \frac{|0+0-t|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}t$$

である。したがって、 $S = \frac{1}{2} \cdot d \cdot h$ より、

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{2(5-4t)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}t = \frac{t\sqrt{5-4t}}{2}$$

が得られる。

(答) $S = \frac{t\sqrt{5-4t}}{2}$

(4)

(3)の結果より、 $S = \frac{t\sqrt{5-4t}}{2} = \frac{1}{2}(-4t^3 + 5t^2)^{\frac{1}{2}}$ である。 $-4t^3 + 5t^2 = f(t)$ とすると、 S と $f(t)$ の

増減は一致するから、 $0 < t < t_0 \left(= \frac{5}{4}\right)$ における $f(t)$ の増減について考えればよい。

$$f'(t) = -12t^2 + 10t = -12t\left(t - \frac{5}{6}\right)$$

であるから、増減表は以下のようになる。

t	(0)	...	$\frac{5}{6}$	...	$\left(\frac{5}{4}\right)$
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	(0)	↗	極大	↘	(0)

上表より、 $f(t)$ が最大になるときの t の値は $\frac{5}{6}$ である。したがって求める S の最大値は、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \sqrt{5-4 \cdot \frac{5}{6}} = \frac{5\sqrt{5}}{12\sqrt{3}} = \frac{5}{36}\sqrt{15}$$

である。

(答) $\frac{5}{36}\sqrt{15}$

5

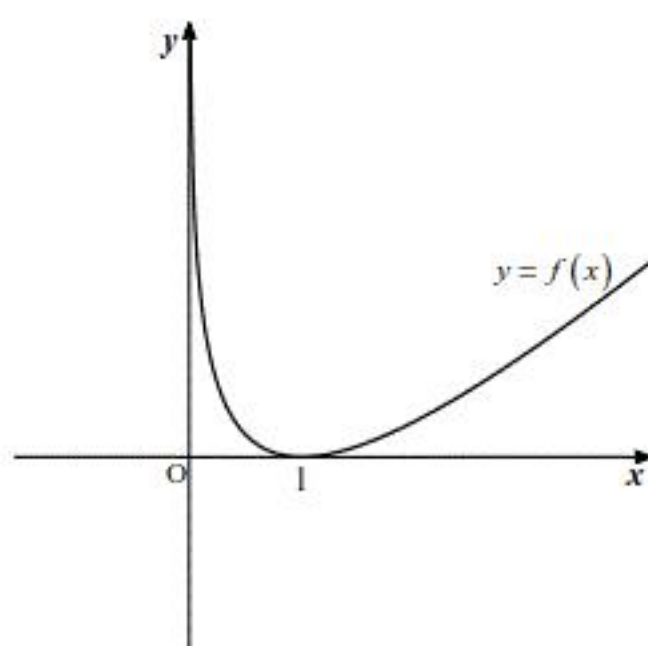
(1)

まず、真数条件より $f(x)$ の定義域は $x > 0$ である。 $f(x) = x - 1 - \log x$ を x で微分すると

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ となるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	0	↗

上表より、 $y = f(x)$ のグラフの概形は以下のようになる。



(答) 前図

(2)

(1)より $f(x)$ は常に正の値をとるから、求める面積 S は

$$\begin{aligned}
 S &= \int_a^{a+1} (x-1-\log x) dx \\
 &= \int_a^{a+1} (x-1) dx - \int_a^{a+1} (x)' \log x dx \\
 &= \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_a^{a+1} - \left([x \log x]_a^{a+1} - \int_a^{a+1} x \cdot \frac{1}{x} dx \right) \\
 &= \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_a^{a+1} - [x \log x]_a^{a+1} + [x]_a^{a+1} \\
 &= \left[\frac{1}{2}x^2 - x \log x \right]_a^{a+1} \\
 &= \frac{1}{2}(a+1)^2 - (a+1)\log(a+1) - \left(\frac{1}{2}a^2 - a \log a \right) \\
 &= a \log a - (a+1)\log(a+1) + a + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $S = a \log a - (a+1)\log(a+1) + a + \frac{1}{2}$

(3)

S を a で微分すると

$$\begin{aligned}
 S' &= 1 \cdot \log a + a \cdot \frac{1}{a} - \left\{ 1 \cdot \log(a+1) + (a+1) \cdot \frac{1}{a+1} \right\} + 1 \\
 &= \log a - \log(a+1) + 1 \\
 &= \log \frac{ea}{a+1}
 \end{aligned}$$

となる。 $a > 0$ に注意すると、 $S' = 0$ となるのは、

$$\log \frac{ea}{a+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{ea}{a+1} = 1 \Leftrightarrow ea = a+1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{e-1}$$

より $a = \frac{1}{e-1}$ のときである。また、 $S'' = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a(a+1)} > 0$ より S' は単調増加関数であるか

ら、 S の増減表は以下のようになる。

a	0	...	$\frac{1}{e-1}$	...
S'		-	0	+
S		↘	極小	↗

したがって $a = \frac{1}{e-1}$ のとき S は最小となる。また、そのときの S の値は、このとき

$$\begin{aligned}
 S' &= 0 \\
 \Leftrightarrow \log a - \log(a+1) + 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \log(a+1) &= 1 + \log a
 \end{aligned}$$

であることに注意すると、

$$\begin{aligned}
 a \log a - (a+1)\log(a+1) + a + \frac{1}{2} &= a \log a - (a+1)(1 + \log a) + a + \frac{1}{2} \\
 &= a \log a - a - a \log a - 1 - \log a + a + \frac{1}{2} \\
 &= -\log a - \frac{1}{2} \\
 &= \log(e-1) - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\log(e-1) - \frac{1}{2}$