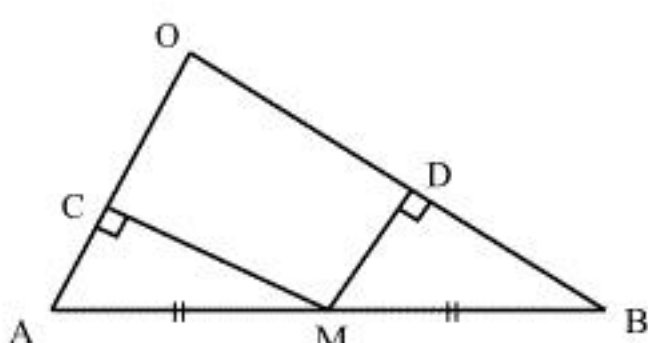


〔解答〕

(1)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	1	0	1	2	1	2	1	6
(2)	10	11	12						
	5	3	6						
(3)	13	14	15	16	17	18			
	1	9	6	0	1	4			

〔解説〕

(1)



$2\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{CA}$ より $OC:CA = 3:2$ であるので、

$$\overrightarrow{OC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA}$$

が成立する。同様に、 $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{DB}$ より

$$\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$$

が成立する。Mは線分ABの中点であるので

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

となる。よって、

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} - \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{10}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} - \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OB}$$

となる。

(2)

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MC} \neq \vec{0}$ であるから、

$$OA \perp MC$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \left(\frac{1}{10}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10}|\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10}|\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 0$$

$$\therefore |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{5}$$

である。同様に、 $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{MD} \neq \vec{0}$ であるから、

$$OB \perp MD$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OB}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}|\overrightarrow{OB}|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{6}|\overrightarrow{OB}|^2 = 0$$

$$\therefore |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{3}$$

である。また、

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2 = (\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 1 + (\sqrt{3})^2 = 6$$

より、

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6}$$

となる。

(3)

$$|\overrightarrow{OC}| = \frac{3}{5}|\overrightarrow{OA}| = \frac{3}{5}\sqrt{5}, \quad |\overrightarrow{OD}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{OB}| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

であり、さらに

$$|\overrightarrow{MC}|^2 = \left|\frac{1}{10}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right|^2 = \frac{1}{100}|\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{1}{10}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}|\overrightarrow{OB}|^2 = \frac{(\sqrt{5})^2}{100} - \frac{1}{10} \cdot 1 + \frac{(\sqrt{3})^2}{4} = \frac{7}{10}$$

$$\therefore |\overrightarrow{MC}| = \frac{\sqrt{70}}{10}$$

$$|\overrightarrow{MD}|^2 = \left|-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OB}\right|^2 = \frac{1}{4}|\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{36}|\overrightarrow{OB}|^2 = \frac{(\sqrt{5})^2}{4} - \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{(\sqrt{3})^2}{36} = \frac{7}{6}$$

$$\therefore |\overrightarrow{MD}| = \frac{\sqrt{42}}{6}$$

である。よって、求める面積を S とすると

$$S = \triangle OCM + \triangle ODM$$

$$= \frac{1}{2} \cdot OC \cdot MC + \frac{1}{2} \cdot OD \cdot MD$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{70}}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{42}}{6}$$

$$= \frac{19}{60}\sqrt{14}$$

となる。

〔解答〕

(1)	<u>19</u>	<u>20</u>	<u>21</u>	<u>22</u>	<u>23</u>	<u>24</u>				
	5	1	2	6	2	5				
(2)	<u>25</u>	<u>26</u>	<u>27</u>	<u>28</u>	<u>29</u>	<u>30</u>	<u>31</u>	<u>32</u>	<u>33</u>	
	4	1	3	8	0	1	2	1	3	

〔解説〕

(1)

玉の取り出し方は全部で

$${}_{n+26}C_2 = \frac{(n+26)(n+25)}{2} \text{ (通り)}$$

であり、これらは同様に確からしい。白玉を1個も取り出さない取り出し方は

$${}_{26}C_2 = 325 \text{ (通り)}$$

であるので、少なくとも白玉を1個取り出す確率は

$$1 - \frac{325}{\frac{(n+26)(n+25)}{2}} = \frac{n(n+51)}{(n+26)(n+25)}$$

となる。

(2)

白玉と赤玉を1個ずつ選ぶ取り出し方は $10n$ 通りであり、赤玉と青玉を1個ずつ選ぶ取り出し方は 160 通りであり、青玉と白玉を1個ずつ選ぶ取り出し方は $16n$ 通りである。よって、

$$p_n = \frac{10n+160+16n}{\frac{(n+26)(n+25)}{2}} = \frac{4(13n+80)}{(n+26)(n+25)}$$

である。 $p_{n+1} - p_n$ を計算すると

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= \frac{4(13n+93)}{(n+27)(n+26)} - \frac{4(13n+80)}{(n+26)(n+25)} \\ &= \frac{4}{(n+27)(n+26)(n+25)} \{(13n+93)(n+25) - (13n+80)(n+27)\} \\ &= \frac{4}{(n+27)(n+26)(n+25)} (-13n+165) \end{aligned}$$

となるので、 $p_n < p_{n+1}$ となるのは

$$-13n+165 > 0 \Leftrightarrow n < \frac{165}{13} = 12.6\dots$$

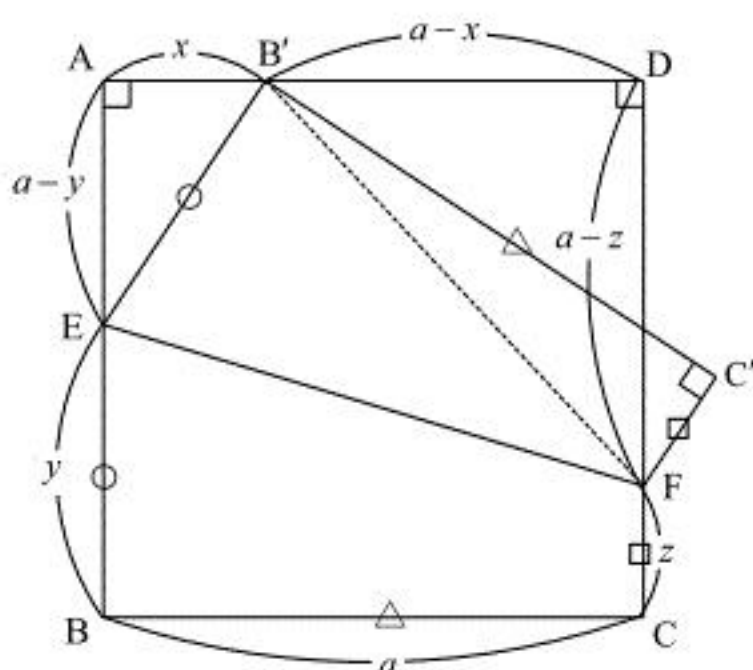
のときであり、 n が整数であることから、これは $n \leq 12$ のときである。同様に $n \geq 13$ のとき
 $p_n > p_{n+1}$ となるので

$$p_1 < p_2 < \dots < p_{12} < p_{13} > p_{14} \dots$$

となる。以上より、 p_n は $n=13$ のとき最大となる。

(1)

点Cに対応する点を C' とする。また、線分BE, CFの長さをそれぞれ y, z とする。



$\triangle AB'E$ に注目して y を x を用いて表すことを考える。このとき、各辺の長さは

$$AB' = x$$

$$AE = AB - BE = a - y$$

$$B'E = BE = y$$

と表せるから、三平方の定理より、 y は x を用いて

$$AB'^2 + AE^2 = B'E^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (a - y)^2 = y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + a^2 - 2ay + y^2 = y^2$$

$$\therefore y = \frac{x^2 + a^2}{2a}$$

と表せる。次に、 $\triangle B'C'F$ に注目して z を x を用いて表すことを考える。このとき、各辺の長さは

$$B'C' = BC = a$$

$$C'F = CF = z$$

$$B'F = \sqrt{B'D^2 + DF^2} = \sqrt{(a - x)^2 + (a - z)^2}$$

と表せるから、三平方の定理より、 z は x を用いて

$$B'C'^2 + C'F^2 = B'F^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + z^2 = \left(\sqrt{(a - x)^2 + (a - z)^2} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + z^2 = (a - x)^2 + a^2 - 2az + z^2$$

$$\therefore z = \frac{(a - x)^2}{2a}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad BE = \frac{x^2 + a^2}{2a}, \quad CF = \frac{(a - x)^2}{2a}$$

(2)

台形EBCFの面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot (BE + CF) \cdot BC \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{x^2 + a^2}{2a} + \frac{(a - x)^2}{2a} \right\} \cdot a \\ &= \frac{1}{2} (x^2 - ax + a^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{3}{8} a^2 \end{aligned}$$

となる。 x のとりうる値の範囲は $0 < x < a$ であるから、 $x = \frac{a}{2}$ のとき、 S は最小値 $\frac{3}{8}a^2$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{8}a^2 \quad (x = \frac{a}{2} \text{のとき})$$

(1)

$f(x) = x - \log(1+x)$ とおく。これを微分すると

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

となる。 $x > 0$ において $f'(x) > 0$ となるので、 $f(x)$ は単調増加である。よって、 $x > 0$ のとき、

$$f(x) > f(0) = 0$$

であるから、

$$x - \log(1+x) > 0 \Leftrightarrow \log(1+x) < x \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。また、 $g(x) = \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ とおく。これを微分すると

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}$$

となる。 $x > 0$ において $g'(x) > 0$ となるので、 $g(x)$ は単調増加である。よって、 $x > 0$ のとき、

$$g(x) > g(0) = 0$$

であるから、

$$\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2} > 0 \Leftrightarrow x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。以上①、②より、 $x > 0$ のとき、

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$$

となる。

(証明終)

(2)

(1)の不等式に $x = \frac{k}{n^2}$ (k, n は自然数, $1 \leq k \leq n$) を代入すると

$$\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k}{n^2}\right)^2 < \log\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) < \frac{k}{n^2}$$

となるので、

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \frac{k}{n^2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k}{n^2}\right)^2 \right\} < \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \log\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) + \cdots + \log\left(1 + \frac{n}{n^2}\right) < \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

が成立する。ここで、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{k}{n^2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k}{n^2}\right)^2 \right\} &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - \frac{1}{2n^4} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{12n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{k}{n^2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k}{n^2}\right)^2 \right\} = \frac{1}{2}$$

であるから、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \log\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) + \cdots + \log\left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \right\} = \frac{1}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \log\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) + \cdots + \log\left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \right\} = \frac{1}{2}$$

5

(1)

半径の長さを r ($r > 0$) とおくと、円 C の方程式は

$$x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = r^2$$

となる。これが点 $(1, 0)$ を通るから、 r の値は

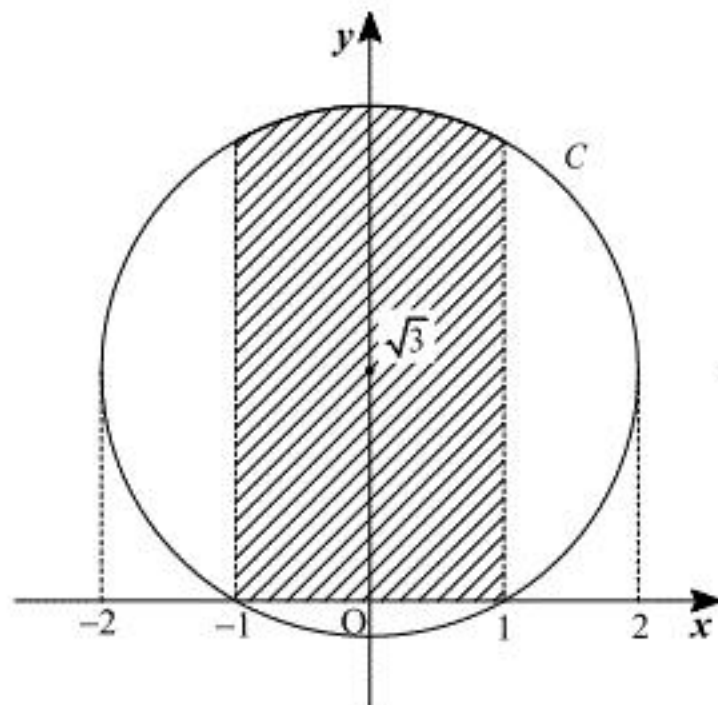
$$1^2 + (0 - \sqrt{3})^2 = r^2$$

$$\therefore r = 2 \quad (\because r > 0)$$

と求まる。

(答) 2

(2)



円 C の方程式を y について解くと、

$$x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{3} \pm \sqrt{4 - x^2}$$

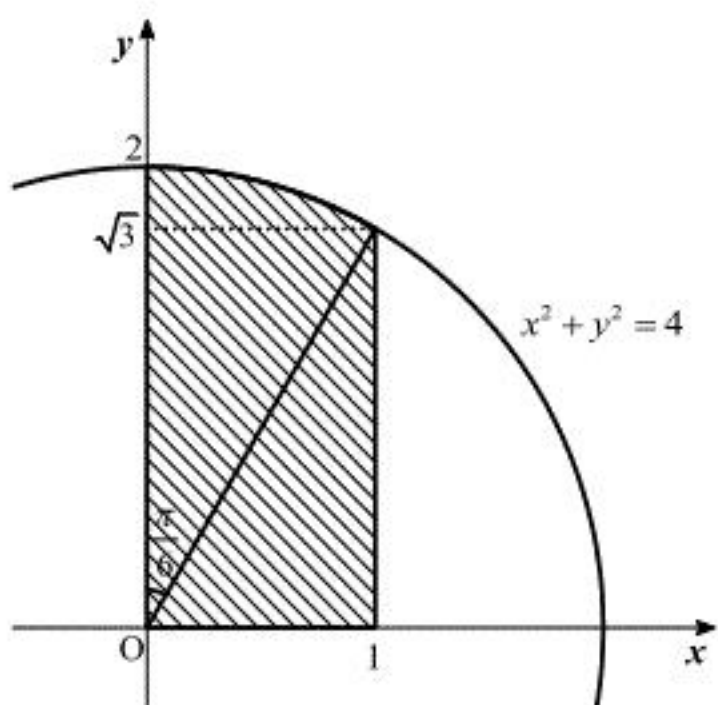
となる。よって、 $y \geq 0$ 、 $-1 \leq x \leq 1$ の部分を x 軸の周りに 1 回転して出来る回転体の体積を V_1 とすると、図形が y 軸に対して対称であることから

$$V_1 = 2 \int_0^1 \pi \left(\sqrt{3} + \sqrt{4 - x^2} \right)^2 dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(3 + 2\sqrt{3}\sqrt{4 - x^2} + 4 - x^2 \right) dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (7 - x^2) dx + 4\sqrt{3}\pi \int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx$$

となる。ここで、 $\int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx$ は $x^2 + y^2 = 2$ で表される円の内部のうち下図斜線部の面積を表すので、



$$\int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3}$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

が成立する。よって、

$$V_1 = 2\pi \left[7x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + 4\sqrt{3}\pi \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

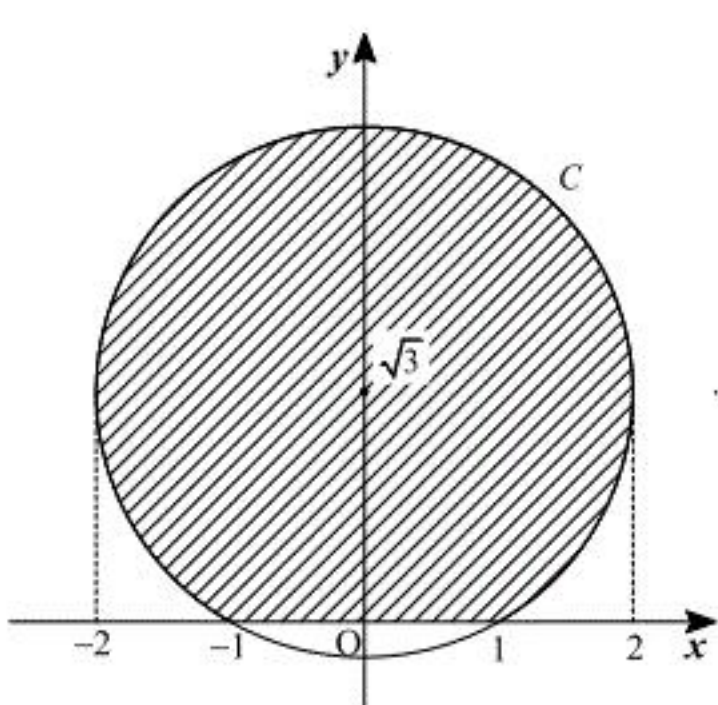
$$= 2\pi \left(7 - \frac{1}{3} \right) + \frac{4\sqrt{3}}{3} \pi^2 + 6\pi$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3} \pi^2 + \frac{58}{3} \pi$$

となる。

(答) $\frac{4\sqrt{3}}{3} \pi^2 + \frac{58}{3} \pi$

(3)



求める体積を V_2 とすると、図形が y 軸に対して対称であることから

$$V_2 = 2 \left\{ \int_0^2 \pi \left(\sqrt{3} + \sqrt{4 - x^2} \right)^2 dx - \int_1^2 \pi \left(\sqrt{3} - \sqrt{4 - x^2} \right)^2 dx \right\}$$

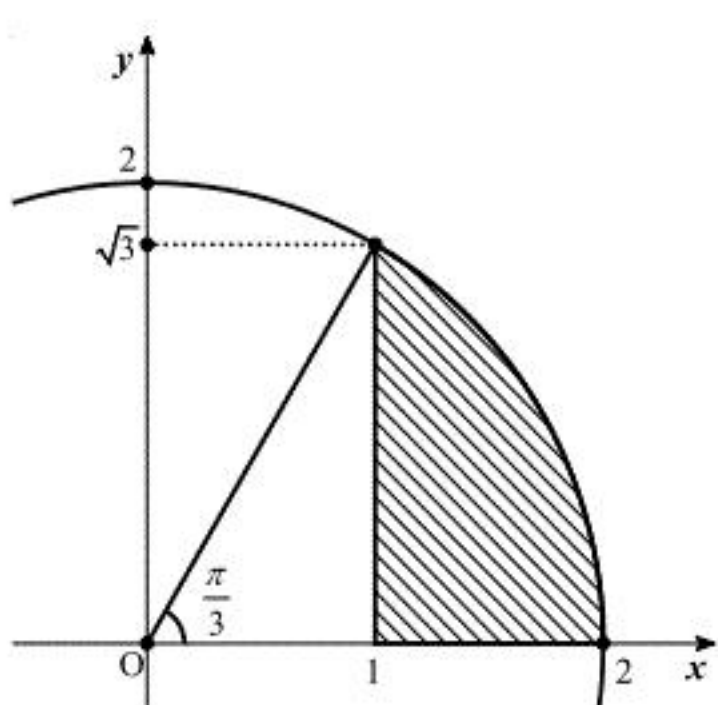
$$= 2\pi \int_0^2 \left(7 - x^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{4 - x^2} \right) dx - 2\pi \int_1^2 \left(7 - x^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{4 - x^2} \right) dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (7 - x^2) dx + 4\sqrt{3}\pi \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx + 4\sqrt{3}\pi \int_1^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

と表される。 $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ は、半径 2、中心角 $\frac{\pi}{2}$ の扇形の面積に等しいので

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

となる。また、 $\int_1^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ の面積は $x^2 + y^2 = 4$ で表される円の内部のうち下図斜線部の面積に等しいので、



$$\int_1^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3}$$

$$= \frac{2}{3} \pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。以上より、

$$V_2 = 2\pi \int_0^1 (7 - x^2) dx + 4\sqrt{3}\pi \cdot \pi + 4\sqrt{3}\pi \left(\frac{2}{3} \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 2\pi \left[7x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + 4\sqrt{3}\pi^2 + \frac{8\sqrt{3}}{3} \pi^2 - 6\pi$$

$$= \frac{20\sqrt{3}}{3} \pi^2 + \frac{22}{3} \pi$$

である。

(答) $\frac{20\sqrt{3}}{3} \pi^2 + \frac{22}{3} \pi$