

〔解答〕

(1)	1	2			
	3	8			
(2)	3	4	5		
	9	6	4		
(3)	6	7	8	9	10
	3	5	1	2	8

〔解説〕

(1)

表、裏の出る確率は同様に確からしいとする。表、裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ であるから、4枚のコインを投げて表が2枚である確率は、

$${}_4C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

である。

(2)

4枚のコインを投げて表が1枚である確率は、

$${}_4C_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

であるから、 $N_1 \neq 1, N_2 \neq 1, N_3 = 1$ となる確率は、

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{64}$$

である。

(3)

4枚のコインを投げて、表が0枚である確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

であるから、 $N_1 = N_2 = 0$ となる確率は、

$$\left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{1}{256}$$

である。同様に、 $N_1 = N_2 = 1$ となる確率は、 $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ であり、 $N_1 = N_2 = 2$ となる確率は、

$\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$ である。ここで、表が0枚である確率と4枚である確率、1枚である確率と3枚であ

る確率はそれぞれ等しいことに注意すると、求める確率は、

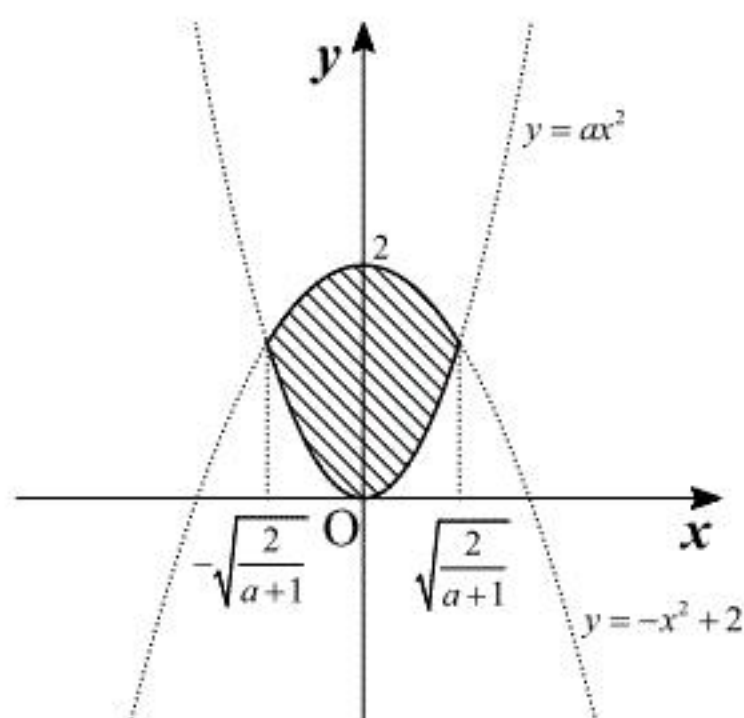
$$\frac{1}{256} \times 2 + \frac{1}{16} \times 2 + \frac{9}{64} = \frac{1+16+18}{128} = \frac{35}{128}$$

となる。

〔解答〕

11	12	13	14
1	1	9	9

〔解説〕



上の図の斜線部分の面積が1となればよい。また、 $a > 0$ より

$$(-x^2 + 2) - ax^2 = -(a+1) \left(x - \sqrt{\frac{2}{a+1}} \right) \left(x + \sqrt{\frac{2}{a+1}} \right)$$

であるから、 $\alpha = \sqrt{\frac{2}{a+1}}$ とすると、斜線部分の面積は、

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\alpha} (-x^2 + 2 - ax^2) dx &= -(a+1) \int_{-\alpha}^{\alpha} (x + \alpha)(x - \alpha) dx \\ &= \frac{a+1}{6} \{ \alpha - (-\alpha) \}^3 \\ &= \frac{4}{3} (a+1) \alpha^3 \\ &= \frac{8}{3} \sqrt{\frac{2}{a+1}} \end{aligned}$$

と表せる。これが1となるとき、

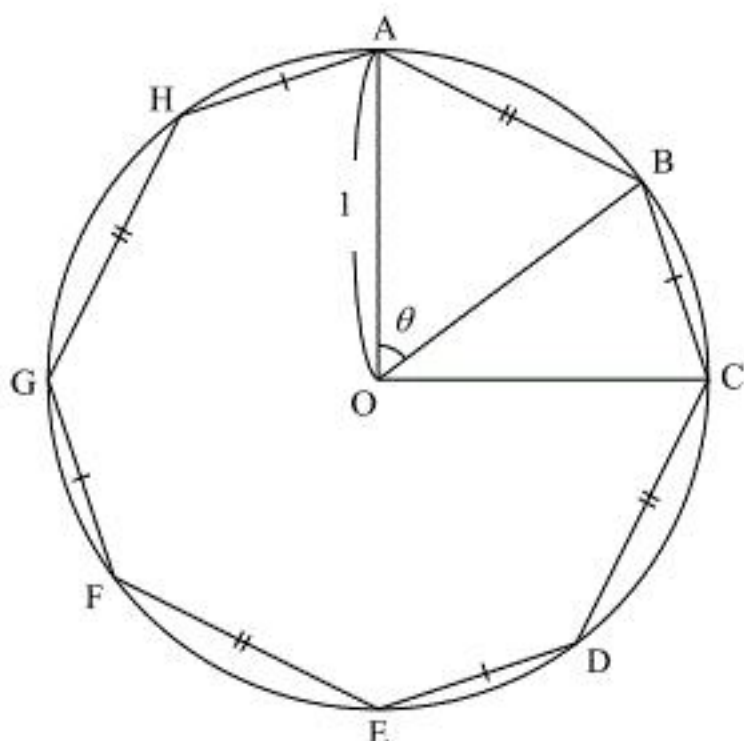
$$\frac{8}{3} \sqrt{\frac{2}{a+1}} = 1$$

であり、両辺2乗することで、

$$\begin{aligned} \frac{64}{9} \cdot \frac{2}{a+1} &= 1 \\ \Leftrightarrow a+1 &= \frac{128}{9} \\ \therefore a &= \frac{119}{9} \end{aligned}$$

となる。

(1)



△OABに余弦定理を用いると

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \theta = 2 - 2 \cos \theta \quad \dots \textcircled{1}$$

である。AB > 0 であるから、

$$AB = \sqrt{2 - 2 \cos \theta}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad AB = \sqrt{2 - 2 \cos \theta}$$

(2)

$$\text{弧 AC} = \text{弧 CE} = \text{弧 EG} = \text{弧 GA}$$

であるから、

$$\angle AOC = \angle COE = \angle EOG = \angle GOA$$

であり、 $\angle AOC = \frac{\pi}{2}$ である。これより、 $\angle BOC = \frac{\pi}{2} - \theta$ であるから、△OBCに余弦定理を用いると、

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = 2 - 2 \sin \theta \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。ここで、 $\frac{1}{\sqrt{2}} AB = BC$ であるから、両辺を二乗して、①、②を代入すると、

$$\frac{1}{2} AB^2 = BC^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (2 - 2 \cos \theta) = 2 - 2 \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = 2 \sin \theta - 1$$

となる。これを、 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ に代入すると、

$$(2 \sin \theta - 1)^2 + \sin^2 \theta = 1$$

$$\Leftrightarrow 5 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta (5 \sin \theta - 4) = 0$$

$$\therefore \sin \theta = 0, \frac{4}{5}$$

である。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\sin \theta \neq 0$ であるから、 $\sin \theta = \frac{4}{5}$ であり、このとき、

$$\cos \theta = 2 \cdot \frac{4}{5} - 1 = \frac{3}{5}$$

となる。したがって、

$$AB = \sqrt{2 - 2 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

である。

$$(\text{答}) \quad AB = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(3)

△OABの面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

であり、△OBCの面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \theta = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

である。これより、8角形ABCDEFGHの面積は、

$$4 \cdot (\triangle OAB + \triangle OBC) = 4 \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{10} \right) = \frac{14}{5}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{14}{5}$$

t を実数として、 $y=x^2$ 上に点 $P(t, t^2)$ をとる。 $t=0$ のとき、法線は y 軸であるがこれは点 $(1, 2)$ を通らない。以下、 $t \neq 0$ として考える。 $y'=2x$ より P での接線の傾きは $2t$ であるから、 P における法線の方程式は、

$$y = -\frac{1}{2t}(x-t) + t^2$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。これが点 $(1, 2)$ を通るとき、

$$2 = -\frac{1}{2t} \cdot 1 + t^2 + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2t^3 - 3t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(2t^2 - 2t - 1) = 0$$

$$\therefore t = -1, \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

である。 $t = -1$ のとき、 $\textcircled{1}$ は、

$$y = \frac{1}{2} \cdot x + (-1)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

となる。また、 $t = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ のとき、複号同順として、

$$-\frac{1}{2t} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1 \pm \sqrt{3}} = \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}$$

$$t^2 + \frac{1}{2} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ は、

$$y = \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}x + \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

となる。したがって、求める法線の方程式は、

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, y = \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}x + \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} \text{ (複号同順)}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}x + \frac{3 - \sqrt{3}}{2}, y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}x + \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$