

【解答】

1	2	3	4	5	6	7
-	2	-	4	-	1	6

【解説】

$p(x)$ は $x^2 + 2x + 4$ で割り切れて、また $p(x)$ の3次の項の係数が1であるから実数 d を用いて

$$p(x) = (x^2 + 2x + 4)(x + d)$$

と表すことが出来る。これを x で微分すると

$$\begin{aligned} p'(x) &= (2x + 2)(x + d) + x^2 + 2x + 4 \\ &= 3x^2 + (2d + 4)x + 2d + 4 \end{aligned}$$

となる。関数 $y = p(x)$ が $x = -\frac{2}{3}$ で極値をとるとき、 $p'\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$ であることが必要だから

$$\begin{aligned} 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + (2d + 4)\left(-\frac{2}{3}\right) + 2d + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3}d + \frac{8}{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow d &= -4 \end{aligned}$$

である。逆に $d = -4$ のとき

$$\begin{aligned} p'(x) &= 3x^2 - 4x - 4 \\ &= (3x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

となり、 $x = -\frac{2}{3}$ で $p'(x)$ の符号が変化するから、関数 $y = p(x)$ は確かに $x = -\frac{2}{3}$ で極値をとる。

したがって $p(x)$ は

$$\begin{aligned} p(x) &= (x^2 + 2x + 4)(x - 4) \\ &= x^3 - 2x^2 - 4x - 16 \end{aligned}$$

となり、これと $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を比較して $a = -2, b = -4, c = -16$ となる。

〔解答〕

(1)	8	9	10
	5	2	5
(2)	11	12	
	2	5	
(3)	13	14	
	9	2	

〔解説〕

(1)

$f(x) = -e^{3x} + 9e^{2x} - 15e^x$ であるから、これを x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3e^{3x} + 18e^{2x} - 15e^x \\ &= -3e^x(e^{2x} - 6e^x + 5) \\ &= -3e^x(e^x - 1)(e^x - 5) \end{aligned}$$

となる。 $f'(x) = 0$ のとき、 $x = 0, \log 5$ であるから、 $f(x)$ の増減は下表のようになる。

x	...	0	...	$\log 5$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

ここで、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^{3x} + 9e^{2x} - 15e^x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、また

$$\begin{aligned} f(\log 5) &= -e^{3\log 5} + 9e^{2\log 5} - 15e^{\log 5} \\ &= -(e^{\log 5})^3 + 9(e^{\log 5})^2 - 15e^{\log 5} \\ &= -5^3 + 9 \cdot 5^2 - 15 \cdot 5 \\ &= 25 \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ は $x = \log 5$ のとき、最大値 25 をとる。

(2)

不等式 $f(x) \geq g(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &\geq g(x) \\ \Leftrightarrow -e^{3x} + 9e^{2x} - 15e^x &\geq 2e^{2x} - 5e^x \\ \Leftrightarrow e^{3x} - 7e^{2x} + 10e^x &\leq 0 \\ \Leftrightarrow e^x(e^x - 2)(e^x - 5) &\leq 0 \end{aligned}$$

となり、 $e^x > 0$ より求める解は

$$\begin{aligned} 2 &\leq e^x \leq 5 \\ \therefore \log 2 &\leq x \leq \log 5 \end{aligned}$$

となる。

(3)

(2) より $\log 2 \leq x \leq \log 5$ のとき $f(x) \geq g(x)$ であるから、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{\log 2}^{\log 5} \{f(x) - g(x)\} dx &= \int_{\log 2}^{\log 5} \{(-e^{3x} + 9e^{2x} - 15e^x) - (2e^{2x} - 5e^x)\} dx \\ &= \int_{\log 2}^{\log 5} (-e^{3x} + 7e^{2x} - 10e^x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}e^{3x} + \frac{7}{2}e^{2x} - 10e^x \right]_{\log 2}^{\log 5} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot (5^3 - 2^3) + \frac{7}{2} \cdot (5^2 - 2^2) - 10 \cdot (5 - 2) \\ &= -39 + \frac{147}{2} - 30 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

となる。

3

(1)

放物線 C_1 は点 $P_1(1, 0)$ および点 $P_2\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ を通るから、放物線 C_1 の方程式は実数 a ($a \neq 0$) を用いて

$$\begin{aligned} y &= a\left(x-1\right)\left(x-\frac{1}{4}\right) \\ &= ax^2 - \frac{5}{4}ax + \frac{a}{4} \end{aligned}$$

と表せる。このとき、

$$y' = 2ax - \frac{5}{4}a$$

であるから、放物線 C_1 上の点 $\left(t, at^2 - \frac{5}{4}at + \frac{a}{4}\right)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \left(2at - \frac{5}{4}a\right)\left(x-t\right) + at^2 - \frac{5}{4}at + \frac{a}{4} \\ &= \left(2at - \frac{5}{4}a\right)x - at^2 + \frac{a}{4} \end{aligned}$$

となる。これが直線 $y=x$ と一致するから

$$\begin{cases} 2at - \frac{5}{4}a = 1 \\ -at^2 + \frac{a}{4} = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。ここで、

$$-at^2 + \frac{a}{4} = 0 \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{4} \quad (\because a \neq 0)$$

であるが、放物線 C_1 と直線 l は第 1 象限で接するから $t > 0$ である。したがって、 $t = \frac{1}{2}$ である。

これを $2at - \frac{5}{4}a = 1$ に代入して

$$\begin{aligned} 2a \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{4}a &= 1 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{4}a &= 1 \\ \Leftrightarrow a &= -4 \end{aligned}$$

となる。したがって放物線 C_1 の方程式は

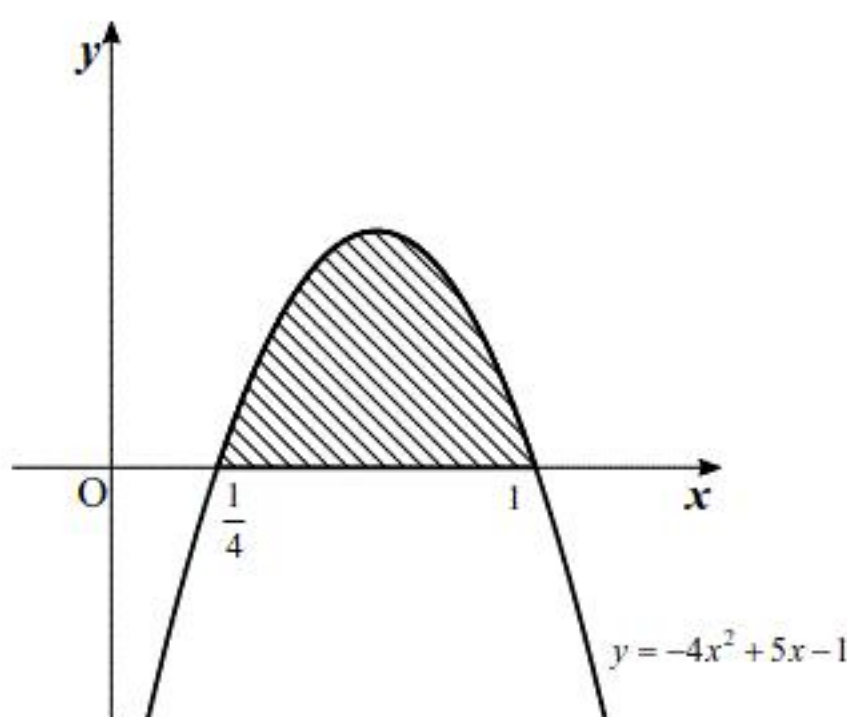
$$\begin{aligned} y &= (-4)x^2 - \frac{5}{4} \cdot (-4) \cdot x + \frac{1}{4}(-4) \\ &= -4x^2 + 5x - 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $y = -4x^2 + 5x - 1$

(2)

放物線 C_1 と x 軸で囲まれる部分は下図の斜線部分である。



上図より求める面積 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\frac{1}{4}}^1 (-4x^2 + 5x - 1) dx \\ &= \int_{\frac{1}{4}}^1 \left\{ -4\left(x-1\right)\left(x-\frac{1}{4}\right) \right\} dx \\ &= \frac{4}{6} \left(1 - \frac{1}{4}\right)^3 \\ &= \frac{9}{32} \end{aligned}$$

となる。

(答) $S_1 = \frac{9}{32}$

(3)

放物線 C_n は 2 点 $\left(\frac{1}{4^{n-1}}, 0\right), \left(\frac{1}{4^n}, 0\right)$ を通るから、この方程式は実数 a_n ($a_n \neq 0$) を用いて

$$\begin{aligned} y &= a_n \left(x - \frac{1}{4^{n-1}}\right) \left(x - \frac{1}{4^n}\right) \\ &= a_n x^2 - \left(\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{4^n}\right) a_n x + \frac{a_n}{4^{2n-1}} \\ &= a_n x^2 - \frac{5}{4^n} a_n x + \frac{a_n}{4^{2n-1}} \end{aligned}$$

と表せる。 $y' = 2a_n x - \frac{5}{4^n} a_n$ より、放物線 C_n の点 $\left(s, a_n s^2 - \frac{5}{4^n} a_n s + \frac{a_n}{4^{2n-1}}\right)$ における接線の方程式

は、(1) と同様にして

$$\begin{aligned} y &= \left(2a_n s - \frac{5}{4^n} a_n\right) \left(x-s\right) + a_n s^2 - \frac{5}{4^n} a_n s + \frac{a_n}{4^{2n-1}} \\ &= \left(2a_n s - \frac{5}{4^n} a_n\right) x - a_n s^2 + \frac{a_n}{4^{2n-1}} \end{aligned}$$

となる。これが $y=x$ と一致するとき

$$\begin{cases} 2a_n s - \frac{5}{4^n} a_n = 1 \\ -a_n s^2 + \frac{1}{4^{2n-1}} a_n = 0 \end{cases}$$

となる。 $-a_n s^2 + \frac{1}{4^{2n-1}} a_n = 0$ となるとき、 $a_n \neq 0$ より $s^2 = \frac{1}{4^{2n-1}}$ であるから $s > 0$ より

$$s = \sqrt{\frac{1}{4^{2n-1}}} = \sqrt{\frac{4}{4^{2n}}} = \frac{2}{4^n}$$

となる。したがって、これを $2a_n s - \frac{5}{4^n} a_n = 1$ に代入して

$$\begin{aligned} 2a_n s - \frac{5}{4^n} a_n &= 1 \\ \Leftrightarrow 2a_n \cdot \frac{2}{4^n} - \frac{5}{4^n} a_n &= 1 \\ \Leftrightarrow a_n &= -4^n \end{aligned}$$

となる。よって、放物線 C_n の方程式は

$$y = -4^n \left(x - \frac{1}{4^{n-1}}\right) \left(x - \frac{1}{4^n}\right)$$

である。よって(2)と同様にして、 C_n は上に凸であるから

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{\frac{1}{4^n}}^{\frac{1}{4^{n-1}}} \left\{ -4^n \left(x - \frac{1}{4^{n-1}}\right) \left(x - \frac{1}{4^n}\right) \right\} dx \\ &= \frac{4^n}{6} \left(\frac{1}{4^{n-1}} - \frac{1}{4^n}\right)^3 \\ &= \frac{4^n}{6} \cdot \frac{3^3}{(4^n)^3} \\ &= \frac{9}{2 \cdot 16^n} \end{aligned}$$

となる。 $S_1 = \frac{9}{32}$ より、数列 $\{S_n\}$ は初項 $\frac{9}{32}$ 、公比 $\frac{1}{16}$ の等比数列であるから、 $\left|\frac{1}{16}\right| < 1$ より無限

等比級数は収束するから、求める無限級数の和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{9}{32}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{3}{10}$$

となる。

(答) $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{3}{10}$

(1)

 C_1 と C_2 の方程式から y を消去すると

$$\begin{aligned}
 2\sin x - \tan x &= 2\cos x - 1 \\
 \Leftrightarrow \tan x(2\cos x - 1) &= 2\cos x - 1 \\
 \Leftrightarrow (\tan x - 1)(2\cos x - 1) &= 0 \\
 \therefore \tan x = 1, \cos x &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

となり、 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ より $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ となる。 $x = \frac{\pi}{4}$ のとき

$$y = 2\cos\frac{\pi}{4} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

となり、 $x = \frac{\pi}{3}$ のとき

$$y = 2\cos\frac{\pi}{3} - 1 = 0$$

となるから求める座標は $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2} - 1\right), \left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ である。

$$(\text{答}) \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2} - 1\right), \left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$$

(2)

 $f(x) = 2\sin x - \tan x, g(x) = 2\cos x - 1$ とおく。 $f(x) \geq g(x)$ を解くと

$$\begin{aligned}
 f(x) &\geq g(x) \\
 \Leftrightarrow 2\sin x - \tan x &\geq 2\cos x - 1 \\
 \Leftrightarrow (\tan x - 1)(2\cos x - 1) &\geq 0 \\
 \therefore \frac{\pi}{4} &\leq x \leq \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

である。よって求める面積は

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \{f(x) - g(x)\} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \{(2\sin x - \tan x) - (2\cos x - 1)\} dx \\
 &= \left[-2\cos x - 2\sin x + x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx \\
 &= \left(-2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - \left(-2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx \\
 &= \left(-1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right) - \left(-\sqrt{2} - \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx \\
 &= -1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{\pi}{12} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx \\
 &= -1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{\pi}{12} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx
 \end{aligned}$$

となる。 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx$ について、 $\cos x = t$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = -\sin x$ であり、 x と t の対応関係は以下

のようになる。

x	$\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{3}$
t	$\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$

以上より、

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-1}{\cos x} \cdot \frac{dt}{dx} dx \\
 &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t} dt \\
 &= \left[\log|t|\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
 &= \log \frac{\sqrt{2}}{2} - \log \frac{1}{2} \\
 &= \log \sqrt{2} \\
 &= \frac{1}{2} \log 2
 \end{aligned}$$

であるから、求める面積は、

$$-1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} \log 2$$

である。

$$(\text{答}) -1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} \log 2$$

$y = \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2}$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2x(x^2 - 2x + 2) - x^2(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 2)^2} \\ &= \frac{-2x^2 + 4x}{(x^2 - 2x + 2)^2} \end{aligned}$$

となり、これをさらに微分すると

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(-4x + 4)(x^2 - 2x + 2)^2 - (-2x^2 + 4x) \cdot 2(x^2 - 2x + 2)(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 2)^4} \\ &= \frac{4x^3 - 12x^2 + 8}{(x^2 - 2x + 2)^3} \\ &= \frac{4(x - 1)(x^2 - 2x - 2)}{(x^2 - 2x + 2)^3} \end{aligned}$$

となる。 $y' = 0$ のとき

$$\begin{aligned} -2x^2 + 4x &= 0 \\ \Leftrightarrow -2x(x - 2) &= 0 \\ \therefore x &= 0, 2 \end{aligned}$$

であり $y'' = 0$ のとき

$$\begin{aligned} (x - 1)(x^2 - 2x - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 1, x^2 - 2x - 2 &= 0 \\ \therefore x &= 1, x = 1 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。よって $y = \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2}$ の増減と凹凸は下のようになる。

x	...	$1 - \sqrt{3}$	...	0	...	1	...	2	...	$1 + \sqrt{3}$	...
y'	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
y''	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
y	$\searrow$	変曲点	$\searrow$	極小	$\nearrow$	変曲点	$\nearrow$	極大	$\searrow$	変曲点	$\searrow$

前表より変曲点の x 座標は $x = 1, 1 \pm \sqrt{3}$ である。 $x = 0$ のとき

$$y = \frac{0^2}{0^2 - 2 \cdot 0 + 2} = 0$$

となるから極小値は 0 であり、 $x = 2$ のとき

$$y = \frac{2^2}{2^2 - 2 \cdot 2 + 2} = 2$$

となるから極大値は 2 である。また、 $x = 1$ のとき

$$y = \frac{1^2}{1^2 - 2 \cdot 1 + 2} = 1$$

となる。さらに、 $x \rightarrow \infty$ としたときの y は

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} y &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

であり $x \rightarrow -\infty$ としたときの y は

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} y &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。以上より、 $y = \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2}$ のグラフは下図のようになる。

