1

〔解答〕

(1)	1	2				
	7	9				
(2)	3	4	5	6	7	8
	1	6	1	5	7	5
(3)	9	10	11	12	13	14
	−	1	9	2	5	0

〔解説〕

(1)

まず，真数条件より，

$$\frac{1}{x-3}>0 \Leftrightarrow x>3$$

である。底の変換公式より，求める解は，

$$\log_3\sqrt{x^2+15}+\log_9\left(\frac{1}{x-3}\right)=\log_{\sqrt{3}}2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_3\left(x^2+15\right)-\frac{\log_3(x-3)}{\log_3 9}=\frac{\log_3 2}{\log_3\sqrt{3}}$$
$$\Leftrightarrow \log_3\frac{x^2+15}{x-3}=\log_3 16$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2+15}{x-3}=16$$
$$\Leftrightarrow x^2-16x+63=0$$
$$\Leftrightarrow (x-7)(x-9)=0$$
$$\therefore x=7,\ 9$$

である。これらは真数条件を満たすため，解となる。

(2)

左辺を展開すると，

$$\left(3\cos\theta+\frac{1}{4\sin\theta}\right)\left(4\sin\theta+\frac{3}{\cos\theta}\right)=10+12\sin\theta\cos\theta+\frac{3}{4\sin\theta\cos\theta}$$
$$=10+6\sin2\theta+\frac{3}{2\sin2\theta}$$

となる。ここで，$0°<2\theta<180°$ より $\sin2\theta>0$ であるから，相加相乗平均の関係式より，

$$6\sin2\theta+\frac{3}{2\sin2\theta}\geqq 2\sqrt{6\sin2\theta\cdot\frac{3}{2\sin2\theta}}$$
$$\Leftrightarrow 10+6\sin2\theta+\frac{3}{2\sin2\theta}\geqq 10+2\cdot3$$
$$\Leftrightarrow \left(3\cos\theta+\frac{1}{4\sin\theta}\right)\left(4\sin\theta+\frac{3}{\cos\theta}\right)\geqq 16$$

が成り立つ。等号成立条件は，

$$6\sin2\theta=\frac{3}{2\sin2\theta}$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 2\theta=\frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow \sin2\theta=\frac{1}{2}\ (\because \sin2\theta>0)$$
$$\Leftrightarrow 2\theta=30°,\ 150°\ (\because 0°<2\theta<180°)$$
$$\therefore \theta=15°,\ 75°\ (\because 0°<\theta<90°)$$

である。

(3)

分母を有理化すると，

$$\left(\frac{-5+3i}{3+5i}\right)^2=\left\{\frac{(-5+3i)(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)}\right\}^2$$
$$=\left(\frac{34i}{34}\right)^2$$
$$=-1$$

と求められる。また，

$$\frac{1}{(3+i)^3}+\frac{1}{(3-i)^3}=\frac{(3-i)^3+(3+i)^3}{(3+i)^3(3-i)^3}$$
$$=\frac{2\cdot3^3+2\cdot3\cdot3i^2}{10^3}$$
$$=\frac{9}{250}$$

となる。

2

(1)

点 P の座標は $\left(t, -t(t-5)\right)$ であり，$0<t<5$ であるから，直線 OP の傾きは，

$$\frac{-t(t-5)}{t}=-t+5$$

となる。また，直線 AP の傾きは，

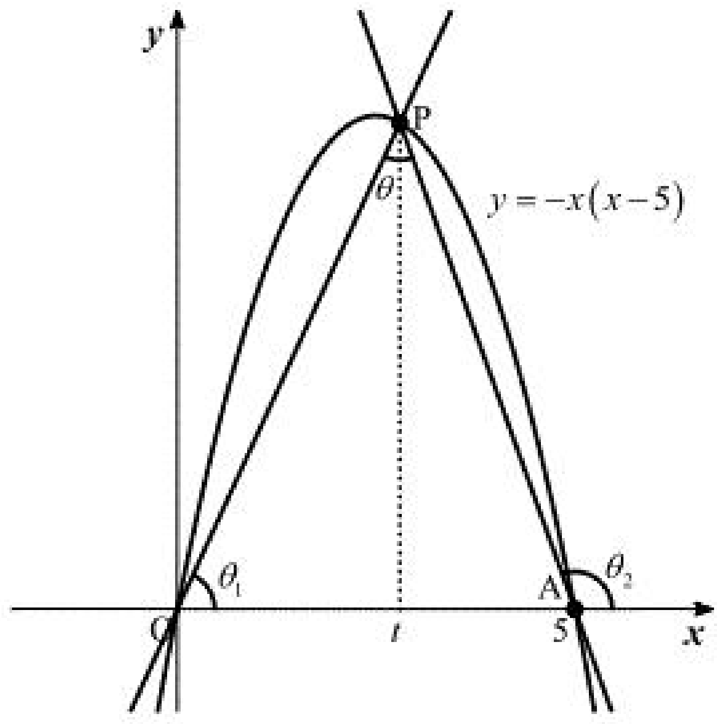
$$\frac{-t(t-5)-0}{t-5}=-t$$

となる。

(答) 直線 OP の傾き：$-t+5$，直線 AP の傾き：$-t$

(2)

直線 OP と x 軸がなす角を θ_1，直線 AP が x 軸となす角を θ_2 とする。以下にグラフを図示する。



(1)より，

$$\tan\theta_1=-t+5,\ \tan\theta_2=-t$$

である。図より，

$$\theta=\theta_2-\theta_1$$

であるから，

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\tan\left(\theta_2-\theta_1\right)\\&=\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}\\&=\frac{-t-(-t+5)}{1-t(-t+5)}\\&=-\frac{5}{t^2-5t+1}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで，$\theta=45°$ となるとき t の値は，

$$\begin{aligned}&\tan 45°=-\frac{5}{t^2-5t+1}\\&\Leftrightarrow t^2-5t+1=-5\\&\Leftrightarrow (t-2)(t-3)=0\\&\therefore t=2,\ 3\end{aligned}$$

となり，これらは $0<t<5$ を満たす。したがって，求める点 P の座標は，

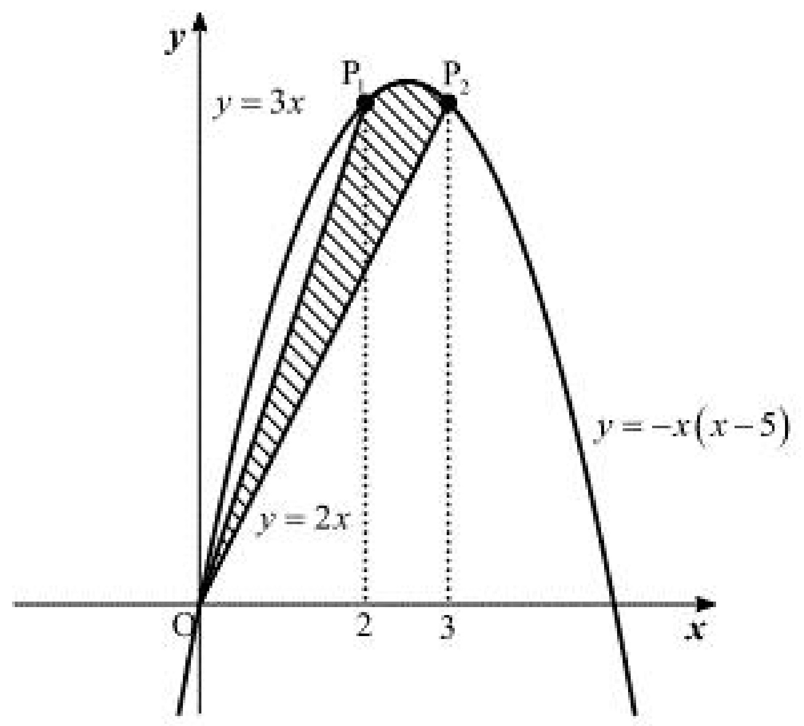
$$(2,\ 6),\ (3,\ 6)$$

である。

(答) $(2,\ 6),\ (3,\ 6)$

(3)

求める面積は，以下の斜線部の面積に等しい。



(1)より，直線 OP_1 の方程式は $y=3x$，直線 OP_2 の方程式は $y=2x$ である。図より，求める面積を S をすると，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 6+\int_2^3\left\{-x(x-5)\right\}dx-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6\\&=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right]_2^3-3\\&=\left(-9+\frac{45}{2}\right)-\left(-\frac{8}{3}+10\right)-3\\&=\frac{19}{6}\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{19}{6}$

3

(1)

$n \geqq 2$ のとき，

$$b_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= n^2 + n - (n-1)^2 - (n-1)$$
$$= 2n$$

が成り立つ。一方で，$n=1$ のとき $b_1 = S_1 = 2$ であるから，すべての自然数 n について数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n は，

$$b_n = 2n$$

である。

(答) $b_n = 2n$

(2)

(1)の結果を用いると，P_n は C 上の点だから，

$$b_n = \log_2 a_n$$
$$\Leftrightarrow a_n = 2^{b_n}$$
$$\therefore a_n = 4^n$$

である。

(答) $a_n = 4^n$

(3)

(2)の結果より，

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} 4^k = \frac{4(4^n - 1)}{4-1} = \frac{4}{3}(4^n - 1)$$

である。

(答) $T_n = \frac{4}{3}(4^n - 1)$

(4)

(3)の結果より，

$$T_n \geqq 10^6$$
$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}(4^n - 1) \geqq 10^6$$
$$\Leftrightarrow 4^n - 1 \geqq \frac{3}{4} \cdot 10^6 \qquad \cdots ①$$

となる。ここで，①の両辺はともに整数であるから，

$$4^n > \frac{3}{4} \cdot 10^6 \qquad \cdots ②$$

となるような最小の整数 n を求めればよい。②の両辺の常用対数をとると，

$$\log_{10} 4^n > \log_{10}\left(\frac{3}{4} \cdot 10^6\right)$$
$$\Leftrightarrow 2n \log_{10} 2 > \log_{10} 3 - 2\log_{10} 2 + 6$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{0.4771 - 2 \cdot 0.3010 + 6}{2 \cdot 0.3010}$$
$$\therefore n > 9.759\cdots$$

となるから，題意を満たす最小の整数 n は $n=10$ である。

(答) $n=10$