

〔解答〕

(1)	1	2	3
	0	1	2
(2)	4	5	6
	9	6	1
(3)	7	8	
	1	2	

〔解説〕

(1)

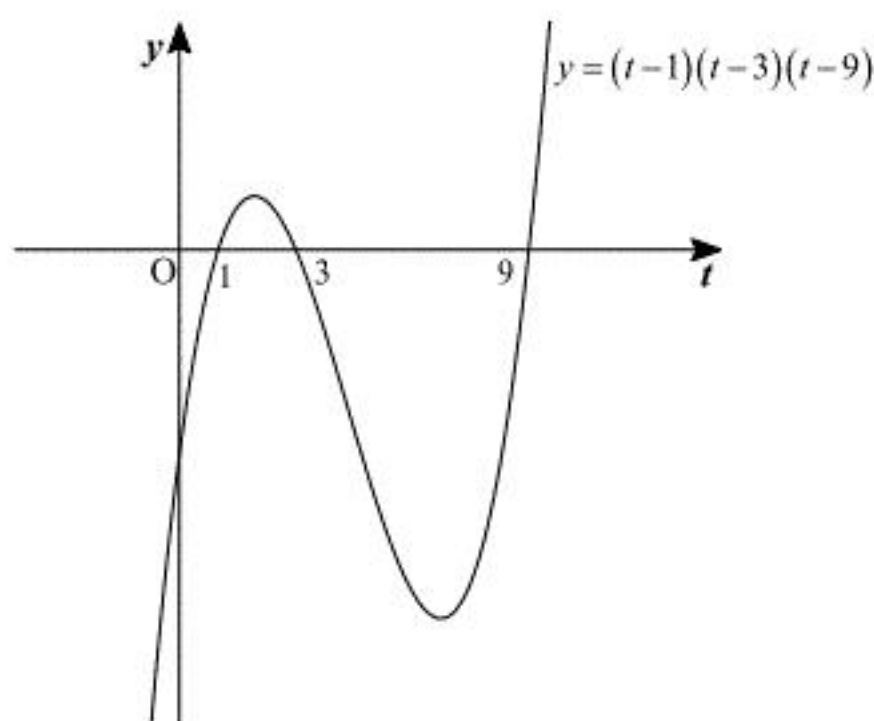
 $t = 3^x$ とおくと、

$$27^x - 13 \cdot 9^x + 13 \cdot 3^{x+1} - 27 > 0$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 13t^2 + 39t - 27 > 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2 - 12t + 27) > 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t-3)(t-9) > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで、 $y = (t-1)(t-3)(t-9)$ のグラフは下図のようになる。上図より、 $\textcircled{1}$ の解は $1 < t < 3, 9 < t$ となる。

$$1 < t < 3, 9 < t$$

$$\Leftrightarrow 1 < 3^x < 3, 9 < 3^x$$

$$\therefore 0 < x < 1, 2 < x$$

となる。

(2)

$$a_1 = S_1 = 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 2 = 9$$

である。また、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3n^3 + 4n + 2 - \{3(n-1)^2 + 4(n-1) + 2\} \\ &= 6n - 3 + 4 \\ &= 6n + 1 \end{aligned}$$

である。

(3)

 $\vec{a}, \vec{b}$ は単位ベクトルであるから、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ である。 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{a} - \vec{b}|$ は辺々正であるから、

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{a} - \vec{b}|$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 3|\vec{a} - \vec{b}|^2$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 3(|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2)$$

$$\Leftrightarrow 8\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$$

である。

(1)

$x = -1$ が 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + a + 1 = 0$ の解であるから、

$$(-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -1 + a - b + a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 2a$$

である。

(答) $b = 2a$

(2)

$b = 2a$ のとき、

$$x^3 + ax^2 + 2ax + a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\{x^2 + (a-1)x + (a+1)\} = 0$$

であるから、3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + a + 1 = 0$ が、実部が負の虚数解を持つことは、2 次方程式 $x^2 + (a-1)x + (a+1) = 0$ が、実部が負の虚数解を持つことに他ならない。

$x^2 + (a-1)x + (a+1) = 0$ が虚数解を持つための必要十分条件は、判別式を D とすると、

$$D < 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 - 4(a+1) < 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 6a - 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{3} < a < 3 + 2\sqrt{3}$$

であると分かる。また、 $x^2 + (a-1)x + (a+1) = 0$ は有理係数の 2 次方程式であるので共役な虚数解を解にもつ。したがって実部が負の虚数解を持つことは 2 つの解の和が負になることに他ならないので、解と係数の関係より、

$$-(a-1) < 0 \Leftrightarrow a > 1$$

$2\sqrt{3} = \sqrt{12} > \sqrt{9} = 3$ より $3 - 2\sqrt{3} < 1 < 3 + 2\sqrt{3}$ であるので、以上の議論により求める解は $1 < a < 3 + 2\sqrt{3}$ となる。

(答) $1 < a < 3 + 2\sqrt{3}$

(1)

$$y = x^2 \text{ について,}$$

$$y' = 2x$$

であるから、 C 上の点 (t, t^2) における C の接線の式は、

$$y - t^2 = 2t(x - t)$$

$$\Leftrightarrow y = 2tx - t^2$$

であり、その傾きは $2t$ である。よって、 ℓ_2 と C の接点の x 座標を b とおくと、 ℓ_1 と ℓ_2 は直交しているから、

$$2a \cdot 2b = -1$$

$$\Leftrightarrow b = -\frac{1}{4a}$$

である。したがって、 ℓ_2 と C の接点の座標は、

$$(b, b^2) = \left(-\frac{1}{4a}, \frac{1}{16a^2}\right)$$

である。

$$(\text{答}) \left(-\frac{1}{4a}, \frac{1}{16a^2}\right)$$

(2)

(1) より ℓ_2 は $y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2}$ である。 P は ℓ_1 と ℓ_2 の交点であるから、 $a > 0$ に注意してそれぞれの y を消去すると

$$2ax - a^2 = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(2a + \frac{1}{2a}\right)x = a^2 - \frac{1}{16a^2}$$

$$\Leftrightarrow 2a\left(1 + \frac{1}{4a^2}\right)x = a^2\left(1 + \frac{1}{4a^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4a^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{2} - \frac{1}{8a} \left(\because a > 0, 1 + \frac{1}{4a^2} > 0\right)$$

$$\therefore x = \frac{4a^2 - 1}{8a}$$

となるので、これを ℓ_1 に代入して、

$$y = 2a \cdot \frac{4a^2 - 1}{8a} - a^2 = -\frac{1}{4}$$

である。よって求める座標は $\left(\frac{4a^2 - 1}{8a}, -\frac{1}{4}\right)$ である。

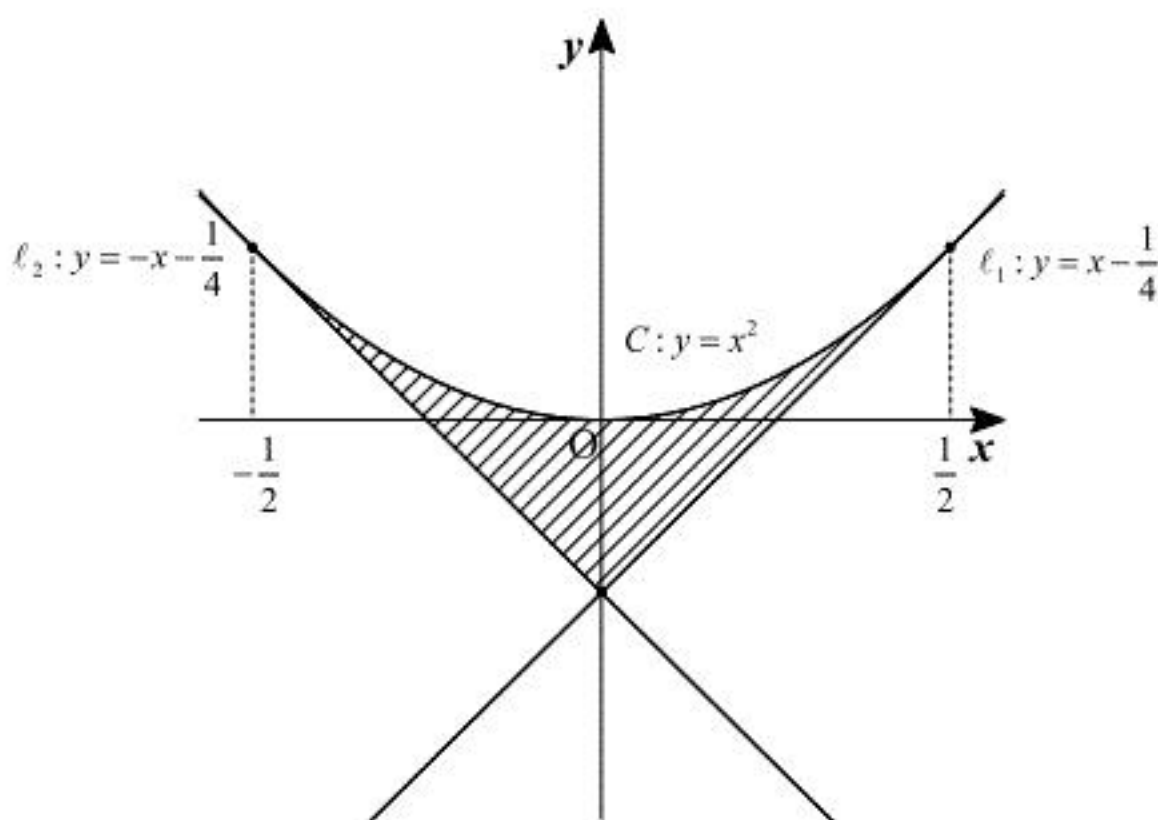
$$(\text{答}) \left(\frac{4a^2 - 1}{8a}, -\frac{1}{4}\right)$$

(3)

P が y 軸上にある為の必要十分条件は、

$$\frac{4a^2 - 1}{8a} = 0 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \left(\because a > 0\right)$$

である。このとき求める面積は、下図斜線部の面積に等しい。



上図斜線部の y 軸対称性を考えれば、求める面積は、

$$2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ x^2 - \left(x - \frac{1}{4} \right) \right\} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 - x + \frac{1}{4} \right) dx$$

$$= 2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right)$$

$$= \frac{1}{12}$$

であると分かる。

$$(\text{答}) \frac{1}{12}$$