

〔解答〕

(1)	1	2	3	4	5		
	8	2	8	4	9		
(2)	6	7	8	9	10	11	12
	1	7	1	1	1	7	8

〔解説〕

(1)

解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = -6, \alpha\beta = -14$$

であるから、

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (-6)^2 - 4 \cdot (-14) = 92$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 &= \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha\beta} \right)^2 \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^2 (\alpha - \beta)^2}{(\alpha\beta)^2} \\ &= \frac{(-6)^2 \cdot 92}{(-14)^2} \\ &= \frac{828}{49} \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\frac{11}{x^2 + y^2} = \frac{3}{xy} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{11}{3}xy$$

であるから、

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = \frac{11}{3}xy + 2xy = \frac{17}{3}xy$$

である。したがって、

$$\frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2} = \frac{\frac{17}{3}xy}{\frac{11}{3}xy} = \frac{17}{11}$$

である。また、

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) \\ &= (x + y) \left(\frac{11}{3}xy - xy \right) \\ &= (x + y) \cdot \frac{8}{3}xy \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{(x + y)^3}{x^3 + y^3} &= \frac{(x + y)^3}{(x + y) \cdot \frac{8}{3}xy} \\ &= \frac{\frac{17}{3}xy}{\frac{8}{3}xy} \\ &= \frac{17}{8} \end{aligned}$$

となる。

Ⅱ

〔解答〕

(1)	13	14	15	16	17
	2	5	1	2	3
(2)	18				
	3				
(3)	19	20	21		
	6	1	1		

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}
 |\overline{BC}|^2 &= |\overline{AC} - \overline{AB}|^2 \\
 &= |\overline{AC}|^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} + |\overline{AB}|^2 \\
 &= 4^2 - 2 \cdot 6\sqrt{3} + 3^2 \\
 &= 25 - 12\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

である。

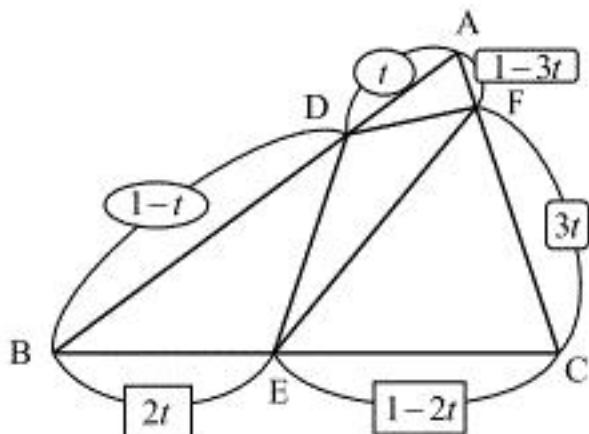
(2)

三角形 ABC の面積を s とすると、

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{AB}|^2 |\overline{AC}|^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{3^2 \cdot 4^2 - (6\sqrt{3})^2} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

である。

(3)



$$\triangle ADF = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AF}{AC} \cdot \triangle ABC = t(1-3t)s$$

であり、同様に、

$$\triangle BDE = 2t(1-t)s, \triangle CEF = 3t(1-2t)s$$

と表せる。これら 3 つの三角形の面積の和を $T(t)$ とすると、 $T(t)$ が最大のとき $S(t)$ は最小である。

$$\begin{aligned}
 T(t) &= t(1-3t)s + 2t(1-t)s + 3t(1-2t)s \\
 &= (-11t^2 + 6t)s \\
 &= \left\{ -11 \left(t - \frac{3}{11} \right)^2 + \frac{9}{11} \right\} s
 \end{aligned}$$

であり、 $0 < \frac{3}{11} < \frac{1}{3}$ であるから、 $T(t)$ は $t = \frac{3}{11}$ のときに最大値 $\frac{9}{11}s$ をとり、このとき、 $S(t)$ は最小値

$$S\left(\frac{3}{11}\right) = s - \frac{9}{11}s = \frac{2}{11}s = \frac{6}{11}$$

をとる。

III

【解答】

(1)	<u>22</u>	<u>23</u>	<u>24</u>	<u>25</u>		
	1	9	2	7		
(2)	<u>26</u>	<u>27</u>	<u>28</u>	<u>29</u>	<u>30</u>	<u>31</u>
	1	6	0	7	2	9
(3)	<u>32</u>	<u>33</u>	<u>34</u>	<u>35</u>	<u>36</u>	<u>37</u>
	2	3	3	7	2	9

【解説】

(1)

ボールを3回投げるとき、的に1回も当たらない確率は、

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

であるから、余事象を考えると求める確率は、

$$1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

である。

(2)

的にちょうど3回当たる確率は

$${}_6C_3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{160}{729}$$

である。

(3)

(2)と同様に考えると、的に4回以上当たる確率は

$$\sum_{k=4}^6 {}_6C_k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{6-k} = \frac{{}_6C_4 \cdot 2^2 + {}_6C_5 \cdot 2 + {}_6C_6}{3^6} = \frac{73}{729}$$

であるから、求める確率は、

$$\frac{160}{729} + \frac{73}{729} = \frac{233}{729}$$

である。

IV

[解答]

(1)	38	39	40	41			
	3	9	5	3			
(2)	42	43	44	45	46	47	48
	3	2	1	0	1	1	2

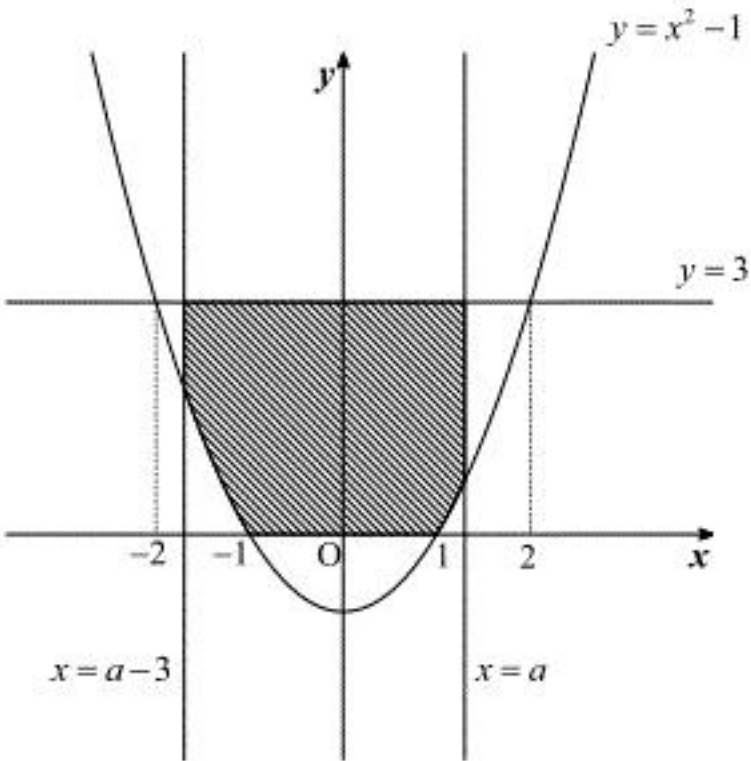
[解説]

(1)

$y = x^2 - 1$ と $y = 3$ の交点の x 座標は

$$x^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

であるから、 $1 \leq a \leq 2$ のとき、 $S(a)$ は下図の斜線部分の面積となる。



したがって、

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{a-3}^a \{3 - (x^2 - 1)\} dx - \int_{-1}^1 \{-(x^2 - 1)\} dx \\ &= \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{a-3}^a + \int_{-1}^1 (x+1)(x-1) dx \\ &= 4\{a - (a-3)\} - \frac{1}{3}\{a^3 - (a-3)^3\} - \frac{1}{6}\{1 - (-1)\}^3 \\ &= -3a^2 + 9a + \frac{5}{3} \end{aligned}$$

である。

(2)

$$S(a) = -3\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} + \frac{5}{3} = -3\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{101}{12}$$

であり、 $1 < \frac{3}{2} < 2$ であるから、 $S(a)$ は $a = \frac{3}{2}$ のとき最大値 $\frac{101}{12}$ をとる。