

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫
5	2	7	2	9	1	4	0	2	6	2	9

〔解説〕

α は $\alpha^2 - 5\alpha - 1 = 0$ を満たし、 $\alpha > 0$ であるから、 $\alpha^2 - 5\alpha - 1 = 0$ の両辺を α で割ると、

$$\alpha - 5 - \frac{1}{\alpha} = 0$$

$$\therefore \alpha - \frac{1}{\alpha} = 5$$

を得る。また、これより、 $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$ は、

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} &= \left\{ \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha} \right)^2 \right\} + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \\ &= \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right)^2 + 2 \\ &= 5^2 + 2 \\ &= 27\end{aligned}$$

と求まる。よって、

$$\begin{aligned}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^2 &= \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha} \right)^2 \\ &= \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \right) + 2 \\ &= 27 + 2 \\ &= 29\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\alpha > 0$ より $\alpha + \frac{1}{\alpha} > 0$ であるから、

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \sqrt{29}$$

となる。以上より、 $\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3}$ は、

$$\begin{aligned}\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3} &= \alpha^3 - \left(\frac{1}{\alpha} \right)^3 \\ &= \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \left\{ \alpha^2 + \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha} \right)^2 \right\} \\ &= \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} + 1 \right) \\ &= 5 \cdot (27 + 1) \\ &= 5 \cdot 28 \\ &= 140\end{aligned}$$

となり、 $\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}$ は、

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} &= \alpha^3 + \left(\frac{1}{\alpha} \right)^3 \\ &= \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \left\{ \alpha^2 - \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha} \right)^2 \right\} \\ &= \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} - 1 \right) \\ &= \sqrt{29} \cdot (27 - 1) \\ &= \sqrt{29} \cdot 26 \\ &= 26\sqrt{29}\end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

(1)	13	14	15	16							
	1	6	3	0							
(2)	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
	1	4	2	1	9	4	2	1	1	2	1

〔解説〕

(1)

9 個の文字をすべて区別して考えると、すべての並べ方は、 ${}_9\text{P}_6$ 通りあり、これらは同様に確からしく起こる。このとき、a, o, y, a, m, a と並ぶ場合の数は、

$$4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 = 96 \text{ (通り)}$$

である。したがって、求める確率は、

$$\begin{aligned} \frac{96}{{}_9\text{P}_6} &= \frac{96}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} \\ &= \frac{1}{630} \end{aligned}$$

となる。

(2)

本問では、選ぶ順番は関係しないため、選んだ文字の組み合わせのみ考えればよい。9 個の文字をすべて区別して考えると、すべての選び方は、 ${}_9\text{C}_6 (=84)$ 通りあり、これらは同様に確からしく起こる。

まず、選んだ文字が 2 種類であるとき、選んだ文字は、

$$(a, a, a, a, o, o), (a, a, a, a, y, y)$$

の 2 パターンである。いずれの場合についても、選び方は、

$${}_4\text{C}_4 \times {}_2\text{C}_2 = 1 \text{ (通り)}$$

である。したがって、求める確率は、

$$\frac{2}{84} = \frac{1}{42}$$

である。

また、選んだ文字が 4 種類であるとき、a, o, y, m がすべて 1 個以上入っているから、選んだ文字は、

$$(a, a, a, o, y, m), (a, a, o, o, y, m), (a, a, o, y, y, m), (a, o, o, y, y, m)$$

の 4 パターンとなる。

[1] (a, a, a, o, y, m) のとき

選び方は、

$${}_4\text{C}_3 \times {}_2\text{C}_1 \times {}_2\text{C}_1 \times {}_1\text{C}_1 = 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 16 \text{ (通り)}$$

である。

[2] (a, a, o, o, y, m), (a, a, o, y, y, m) のとき

いずれの場合も、選び方は、

$${}_4\text{C}_2 \times {}_2\text{C}_2 \times {}_2\text{C}_1 \times {}_1\text{C}_1 = 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 12 \text{ (通り)}$$

である。

[3] (a, o, o, y, y, m) のとき

選び方は、

$${}_4\text{C}_1 \times {}_2\text{C}_2 \times {}_2\text{C}_2 \times {}_1\text{C}_1 = 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4 \text{ (通り)}$$

である。

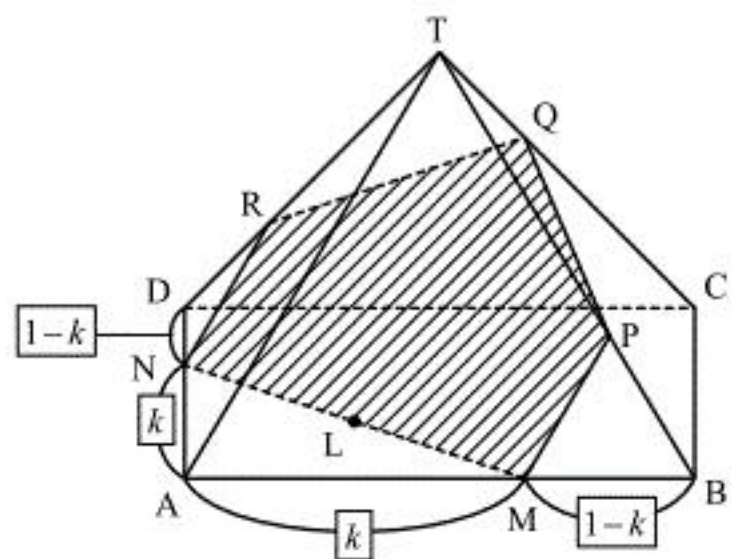
以上, [1], [2], [3] より、選んだ文字が 4 種類である確率は、

$$\frac{16 + 2 \times 12 + 4}{84} = \frac{44}{84} = \frac{11}{21}$$

となる。また、選ぶ文字の種類が 1 種類、あるいは、5 種類以上となることはないため、選んだ文字が 3 種類である事象は、選んだ文字が 2 種類または 4 種類である事象の余事象である。よって、その確率は、

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{1}{42} + \frac{11}{21} \right) &= \frac{42 - 1 - 22}{42} \\ &= \frac{19}{42} \end{aligned}$$

となる。



(1)

点Mは線分ABを $k:(1-k)$ に内分する点だから、その座標は、

$$\left(\frac{(1-k) \cdot 1 + k \cdot 0}{k + (1-k)}, \frac{(1-k) \cdot 0 + k \cdot 1}{k + (1-k)}, \frac{(1-k) \cdot 0 + k \cdot 0}{k + (1-k)} \right) = (1-k, k, 0)$$

である。点Nは線分ADを $k:(1-k)$ に内分する点だから、その座標は、

$$\left(\frac{(1-k) \cdot 1 + k \cdot 0}{k + (1-k)}, \frac{(1-k) \cdot 0 + k \cdot (-1)}{k + (1-k)}, \frac{(1-k) \cdot 0 + k \cdot 0}{k + (1-k)} \right) = (1-k, -k, 0)$$

である。よって線分MNの中点Lの座標は、

$$\left(\frac{(1-k) + (1-k)}{2}, \frac{k + (-k)}{2}, \frac{0+0}{2} \right) = (1-k, 0, 0)$$

である。

(答) $M(1-k, k, 0), N(1-k, -k, 0), L(1-k, 0, 0)$

(2)

$\triangle TAB$ に着目すると、 $AT \parallel \alpha$ より、 $AT \parallel MP$ が成り立つ。よって、

$$TP:PB = AM:MB = k:(1-k)$$

となる。したがって、Pの座標は、

$$\left(\frac{(1-k) \cdot 0 + k \cdot 0}{k + (1-k)}, \frac{(1-k) \cdot 0 + k \cdot 1}{k + (1-k)}, \frac{(1-k) \cdot 1 + k \cdot 0}{k + (1-k)} \right) = (0, k, 1-k)$$

である。同様に、 $\triangle TDA$ に着目すると、 $AT \parallel \alpha$ より、 $AT \parallel NR$ が成り立つ。よって、

$$TR:RD = AN:ND = k:(1-k)$$

となる。したがって、Rの座標は、

$$\left(\frac{(1-k) \cdot 0 + k \cdot 0}{k + (1-k)}, \frac{(1-k) \cdot 0 + k \cdot (-1)}{k + (1-k)}, \frac{(1-k) \cdot 1 + k \cdot 0}{k + (1-k)} \right) = (0, -k, 1-k)$$

である。最後に、 $\triangle TAC$ に着目する。対称性より、点LはAC上にあり、 $AT \parallel \alpha$ より、 $AT \parallel LQ$ が成り立つ。よって、

$$TQ:QC = AL:LC = k:(2-k)$$

となる。したがって、Qの座標は、

$$\left(\frac{(2-k) \cdot 0 + k \cdot (-1)}{k + (2-k)}, \frac{(2-k) \cdot 0 + k \cdot 0}{k + (2-k)}, \frac{(2-k) \cdot 1 + k \cdot 0}{k + (2-k)} \right) = \left(-\frac{k}{2}, 0, 1-\frac{k}{2} \right)$$

である。

(答) $P(0, k, 1-k), Q\left(-\frac{k}{2}, 0, 1-\frac{k}{2}\right), R(0, -k, 1-k)$

(3)

点Lの座標が $(1-k, 0, 0)$ 、点Qの座標が $\left(-\frac{k}{2}, 0, 1-\frac{k}{2}\right)$ であるから、線分LQの長さは、

$$\begin{aligned} \sqrt{\left\{1-k - \left(-\frac{k}{2}\right)\right\}^2 + 0^2 + \left\{-\left(1-\frac{k}{2}\right)\right\}^2} &= \sqrt{\left(1-\frac{k}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{k}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{2} \left|1-\frac{k}{2}\right| \\ &= \sqrt{2} \left(1-\frac{k}{2}\right) \quad (\because 0 < k < 1) \end{aligned}$$

となる。

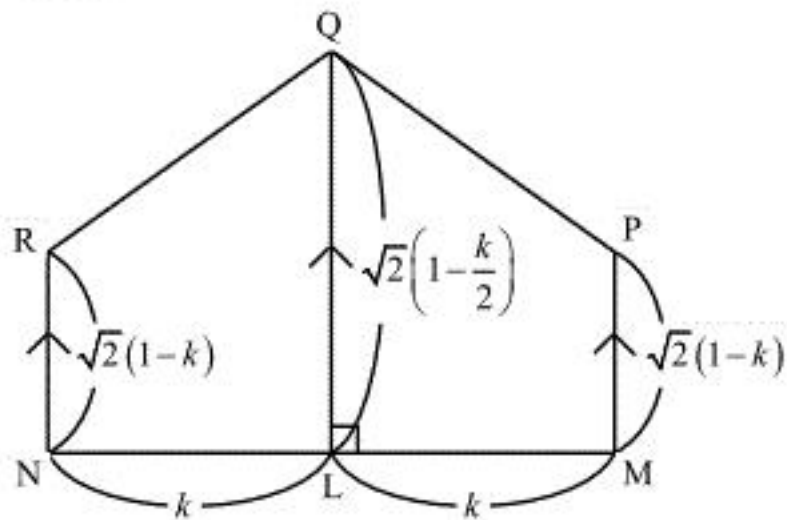
(答) $\sqrt{2} \left(1-\frac{k}{2}\right)$

(4)

点Mの座標が $(1-k, k, 0)$ 、点Pの座標が $(0, k, 1-k)$ であるから、線分MPの長さは、

$$\begin{aligned} \sqrt{(1-k)^2 + (k-k)^2 + (1-k)^2} &= \sqrt{2} |1-k| \\ &= \sqrt{2} (1-k) \quad (\because 0 < k < 1) \end{aligned}$$

となる。対称性より、NRの長さも $\sqrt{2}(1-k)$ と求まる。また、 $AT \parallel MP, AT \parallel LQ, AT \parallel NR$ より、 $MP \parallel LQ \parallel NR$ である。さらに、対称性から、 $QL \perp MN$ も成り立つ。したがって、五角形MPQRNは下図のようになる。



したがって、五角形MPQRNの面積を $S(k)$ とすると、

$$\begin{aligned} S(k) &= 2 \left[\frac{1}{2} \cdot k \cdot \left\{ \sqrt{2}(1-k) + \sqrt{2} \left(1-\frac{k}{2}\right) \right\} \right] \\ &= \sqrt{2} k \left(2 - \frac{3}{2} k \right) \\ &= -\frac{3\sqrt{2}}{2} k^2 + 2\sqrt{2} k \end{aligned}$$

となる。

(答) $-\frac{3\sqrt{2}}{2} k^2 + 2\sqrt{2} k$

(5)

$$\begin{aligned} S(k) &= -\frac{3\sqrt{2}}{2} k^2 + 2\sqrt{2} k \\ &= -\frac{3\sqrt{2}}{2} \left(k - \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、五角形MPQRNの面積 $S(k)$ は、 $k = \frac{2}{3}$ のとき最大値 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ をとる。

(答) $k = \frac{2}{3}$ のとき最大値 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(1)

$f(x) = \frac{1}{\sin x} + 4\sin x$ について,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\cos x}{\sin^2 x} + 4\cos x \\ &= \frac{-\cos x + 4\sin^2 x \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\cos x(2\sin x - 1)(2\sin x + 1)}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

である。よって,

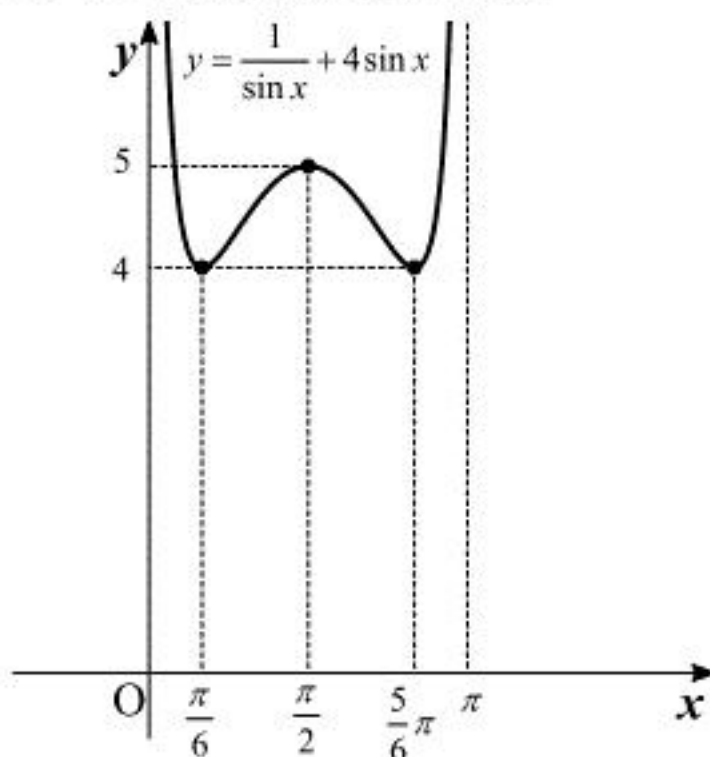
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1)(2\sin x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ または } \sin x &= \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となり, $0 < x < \pi$ より, $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi$ を得る。さらに, $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi-0} \frac{1}{\sin x} = \infty$ だから,

$0 < x < \pi$ において, $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	(∞)	$\searrow$	4	$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	(∞)

したがって, $y = f(x)$ のグラフの概形は次のようになる。



(答) 前述

(2)

$0 < x < \pi$ において $\sin x > 0$ であることに注意すると, 与えられた方程式は,

$$\begin{aligned} 2\cos 2x + k\sin x &= 3 \\ \Leftrightarrow 2(1 - 2\sin^2 x) + k\sin x &= 3 \\ \Leftrightarrow 2 - 4\sin^2 x + k\sin x &= 3 \\ \Leftrightarrow 1 + 4\sin^2 x &= k\sin x \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x} + 4\sin x &= k \end{aligned}$$

と変形できる。したがって方程式 $2\cos 2x + k\sin x = 3$ の異なる実数解の個数は,

$y = \frac{1}{\sin x} + 4\sin x$ のグラフと, $y = k$ のグラフの共有点の個数に等しい。(1)のグラフより,

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 \text{ 個} & (k < 4 \text{ のとき}) \\ 2 \text{ 個} & (k = 4 \text{ のとき}) \\ 4 \text{ 個} & (4 < k < 5 \text{ のとき}) \\ 3 \text{ 個} & (k = 5 \text{ のとき}) \\ 2 \text{ 個} & (5 < k \text{ のとき}) \end{array} \right.$$

となる。

(答) $k < 4$ のとき 0 個 $k = 4, 5 < k$ のとき 2 個 $k = 5$ のとき 3 個 $4 < k < 5$ のとき 4 個

(1)

$$I_1 = (-1)^{1-1} \cdot \int_0^1 \frac{x^{2(1-1)}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$$

である。ここで、 $x = \tan \theta$ とおくと、 $\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ であり、積分区間は次のように対応する。

x	0	$\rightarrow$	1
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

よって、

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{x^2+1} \frac{dx}{d\theta} \cdot d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{\pi}{4}$

(2)

$I_n - I_{n+1}$ を変形すると、

$$\begin{aligned} I_n - I_{n+1} &= (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{x^{2(n-1)}}{x^2+1} dx - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{x^2+1} dx \\ &= (-1)^{n-1} \int_0^1 \left\{ \frac{x^{2(n-1)}}{x^2+1} + \frac{x^{2n}}{x^2+1} \right\} dx \\ &= (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{x^{2(n-1)}(x^2+1)}{x^2+1} dx \\ &= (-1)^{n-1} \int_0^1 x^{2(n-1)} dx \\ &= (-1)^{n-1} \left[\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right]_0^1 \\ &= (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2n-1} - 0 \right) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

(3)

$\frac{x^{2(n-1)}}{x^2+1} \geq 0$ より、 $\int_0^1 \frac{x^{2(n-1)}}{x^2+1} dx \geq 0$ であるから、

$$|I_n| = \left| (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{x^{2(n-1)}}{x^2+1} dx \right| = \int_0^1 \frac{x^{2(n-1)}}{x^2+1} dx$$

が成り立つ。 $\frac{1}{x^2+1} \leq 1$ であり、 $x^{2(n-1)} \geq 0$ と合わせて、 $\frac{x^{2(n-1)}}{x^2+1} \leq x^{2(n-1)}$ が分かる。したがって、

$$\begin{aligned} |I_n| &\leq \int_0^1 x^{2(n-1)} dx \\ &= \left[\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2n-1} \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(4)

$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ とおくと、(2)より $\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = I_k - I_{k+1}$ であるから、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (I_k - I_{k+1}) \\ &= (I_1 - I_2) + (I_2 - I_3) + (I_3 - I_4) + \cdots + (I_n - I_{n+1}) \\ &= I_1 - I_{n+1} \\ &= \frac{\pi}{4} - I_{n+1} \quad ((1)より) \end{aligned}$$

となる。ここで、(3)より

$$\begin{aligned} |I_{n+1}| &\leq \frac{1}{2(n+1)-1} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2n+1} &\leq I_{n+1} \leq \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

である。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2n-1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0$ より、はさみうちの原理から、 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n+1} = 0$ である。よつ

て、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4} - I_{n+1} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{\pi}{4}$