

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
2	3	1	2	2	3	3	3	8	6

〔解説〕

$$m^2 - n^2 - 5m - n + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+n)(m-n) - 5m - n + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+n-2)(m-n-3) + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+n-2)(m-n-3) = -12$$

となる。このとき、 $n > 0$ であるから、 $m+n-2 > m-n-3$ である。また、 m, n は整数であるから $m+n-2, m-n-3$ はいずれも整数であり、 $-12 = -2^2 \cdot 3$ である。以上より、 $m+n-2, m-n-3$ の組としては、

$$(m+n-2, m-n-3) = (1, -12), (2, -6), (3, -4), (4, -3), (6, -2), (12, -1)$$

が考えられる。ここで、 $m+n, m-n$ の偶奇は一致するから、 $m+n-2, m-n-3$ の偶奇は一致しない。上記の6つの組のうちこの条件を満たすのは、

$$(m+n-2, m-n-3) = (1, -12), (3, -4), (4, -3), (12, -1)$$

である。このとき、

$$\begin{cases} m+n-2=1 \\ m-n-3=-12 \end{cases} \Leftrightarrow (m, n) = (-3, 6)$$

$$\begin{cases} m+n-2=3 \\ m-n-3=-4 \end{cases} \Leftrightarrow (m, n) = (2, 3)$$

$$\begin{cases} m+n-2=4 \\ m-n-3=-3 \end{cases} \Leftrightarrow (m, n) = (3, 3)$$

$$\begin{cases} m+n-2=12 \\ m-n-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow (m, n) = (8, 6)$$

である。これらのうち、 $(m, n) = (-3, 6)$ は、 m が自然数ではないから問の条件を満たさない。以上より、等式 $m^2 - n^2 - 5m - n + 18 = 0$ を満たす自然数 (m, n) の組は、

$$(m, n) = (2, 3), (3, 3), (8, 6)$$

が存在する。

〔解答〕

(1)	$\boxed{11}, \boxed{12}, \boxed{13}$	$\boxed{14}, \boxed{15}$	$\boxed{16}, \boxed{17}, \boxed{18}$	$\boxed{19}, \boxed{20}, \boxed{21}$
	$\frac{5}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{27}$
(2)	$\boxed{22}, \boxed{23}, \boxed{24}, \boxed{25}, \boxed{26}, \boxed{27}$			
	$\frac{16}{2187}$			

〔解説〕

(1)

n 分後の時点で存在している細菌を第 n 世代と呼ぶことにする。第 2 世代で細菌が 1 個、2 個、3 個、4 個になる確率を求める。第 1 世代で細菌が 0 個となった場合、以降の世代では常に細菌は 0 個となる。第 1 世代で細菌が 1 個となる確率及び第 1 世代で細菌が 2 個となる確率は、いずれも $\frac{1}{3}$ である。第 1 世代で細菌が 1 個であるとき、第 2 世代で細菌が 1 個となる確率は $\frac{1}{3}$ である。第 1 世代で細菌が 2 個であるとき、第 2 世代で細菌が 1 個となるのは、2 個の細菌のうち 1 個が次の世代で 0 個となり、1 個が次の世代で 1 個となるときであり、その確率は、

$$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

である。以上より、第 2 世代で細菌が 1 個となる確率は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{5}{27}$$

である。第 1 世代で細菌が 1 個であるとき、第 2 世代で細菌が 2 個となる確率は $\frac{1}{3}$ である。第 1 世代で細菌が 2 個であるとき、第 2 世代で細菌が 2 個となるのは、2 個の細菌のうち 1 個が次の世代で 0 個となり、1 個が次の世代で 2 個となるときと、2 個の細菌がいずれも次の世代で 1 個となるときであり、その確率は、

$$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

である。以上より、第 2 世代で細菌が 2 個となる確率は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

である。第 1 世代で細菌が 1 個であるとき、第 2 世代で細菌が 3 個となることはない。第 1 世代で細菌が 2 個であるとき、第 2 世代で細菌が 3 個となるのは、2 個の細菌のうち 1 個が次の世代で 1 個となり、1 個が次の世代で 2 個となるときであり、その確率は、

$$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

である。以上より、第 2 世代で細菌が 3 個となる確率は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{27}$$

である。第 1 世代で細菌が 1 個であるとき、第 2 世代で細菌が 4 個となることはない。第 1 世代で細菌が 2 個であるとき、第 2 世代で細菌が 4 個となるのは、2 個の細菌がいずれも次の世代で 2 個となるときであり、その確率は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

である。以上より、第 2 世代で細菌が 4 個となる確率は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$$

である。

(2)

第 3 世代で細菌が 6 個になるためには、第 2 世代で細菌が 3 個以上存在していることが必要である。第 2 世代で細菌が 3 個であるとき、第 3 世代で細菌が 6 個となるのは、3 個の細菌がいずれも次の世代で 2 個となるときであり、その確率は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

である。第 2 世代で細菌が 4 個であるとき、第 3 世代で細菌が 6 個となるのは、4 個の細菌のうち 2 個が次の世代で 1 個となり、2 個が次の世代で 2 個となるときと、1 個が次の世代で 0 個となり、3 個が次の世代で 2 個となるときであり、その確率は、

$${}_4C_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + {}_4C_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{27} + \frac{4}{81} = \frac{10}{81}$$

である。以上より、第 3 世代で細菌が 6 個となる確率は、

$$\frac{2}{27} \cdot \frac{1}{27} + \frac{1}{27} \cdot \frac{10}{81} = \frac{16}{2187}$$

である。

(1)

点 H は直線 AB 上に存在するから、実数 t を用いて、

$$\overrightarrow{UH} = t\overrightarrow{UA} + (1-t)\overrightarrow{UB}$$

と表される。ここで、 $\overrightarrow{UH} \perp \overrightarrow{AB}$ であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{UH} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{t\overrightarrow{UA} + (1-t)\overrightarrow{UB}\} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ \Leftrightarrow \{t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OU}\} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ \Leftrightarrow (-4t + 3 - u, -2t + 5, 2t + 1) \cdot (4, 2, -2) &= 0 \\ \Leftrightarrow -24t - 4u + 20 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{-u+5}{6}\end{aligned}$$

である。以上より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{UH} \\ &= \overrightarrow{OU} + \frac{-u+5}{6}\overrightarrow{UA} + \frac{u+1}{6}\overrightarrow{UB} \\ &= (u, 0, 0) + \frac{-u+5}{6}(-1-u, 3, 3) + \frac{u+1}{6}(3-u, 5, 1) \\ &= \left(\frac{2}{3}u - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}u + \frac{10}{3}, -\frac{1}{3}u + \frac{8}{3}\right)\end{aligned}$$

である。則ち、点 H の座標は $\left(\frac{2}{3}u - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}u + \frac{10}{3}, -\frac{1}{3}u + \frac{8}{3}\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad H\left(\frac{2}{3}u - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}u + \frac{10}{3}, -\frac{1}{3}u + \frac{8}{3}\right)$$

(2)

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot UH$$

であるから、 S が最小となるのは、 UH が最小となるときである。ここで、

$$\begin{aligned}UH &= \sqrt{\left\{\left(\frac{2}{3}u - \frac{1}{3}\right) - u\right\}^2 + \left(\frac{1}{3}u + \frac{10}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}u + \frac{8}{3}\right)^2} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{(-u-1)^2 + (u+10)^2 + (-u+8)^2} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{3u^2 + 6u + 165} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{3(u+1)^2 + 162}\end{aligned}$$

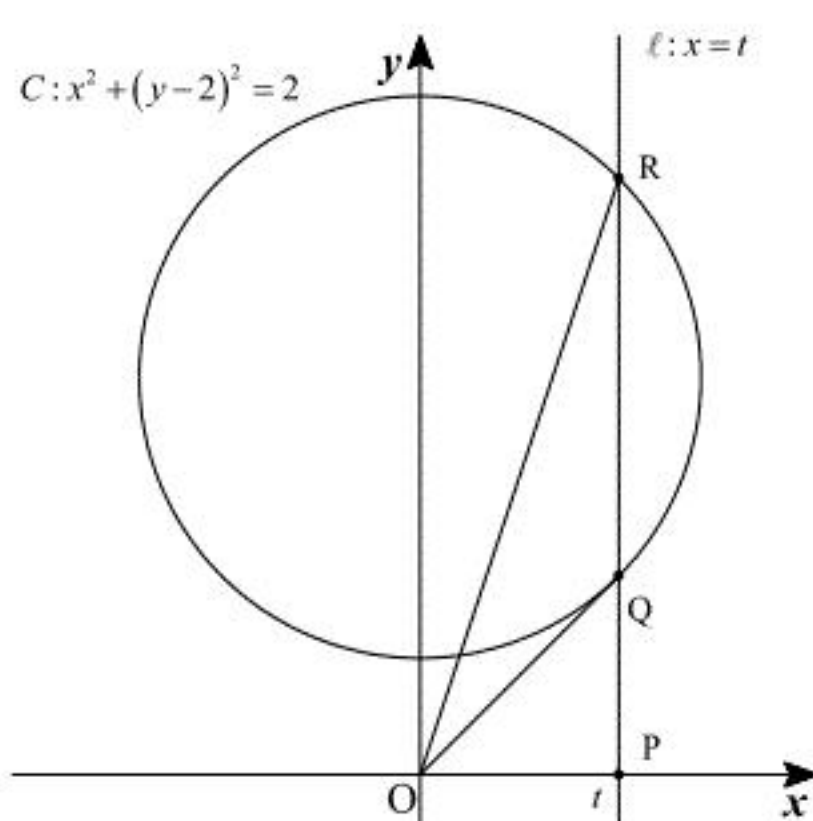
である。以上より、 S が最小となるのは $u = -1$ のときであり、このとき

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot UH \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{162} \\ &= 6\sqrt{3}\end{aligned}$$

となり、U の座標は $(-1, 0, 0)$ となる。

$$(\text{答}) \quad U: (-1, 0, 0), S = 6\sqrt{3}$$

(1)



直線 ℓ と円 C の交点の座標は $0 < t < \sqrt{2}$ より、

$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 2 \\ x = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (t, 2 \pm \sqrt{2-t^2})$$

であるから、点 R 、点 Q の座標は、 $R(t, 2 + \sqrt{2-t^2})$ 、 $Q(t, 2 - \sqrt{2-t^2})$ である。以上と図より、

$$\tan \angle POQ = \frac{PQ}{OP} = \frac{2 - \sqrt{2-t^2}}{t}$$

$$\tan \angle POR = \frac{PR}{OP} = \frac{2 + \sqrt{2-t^2}}{t}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \tan \angle POQ = \frac{2 - \sqrt{2-t^2}}{t}$$

$$\tan \angle POR = \frac{2 + \sqrt{2-t^2}}{t}$$

(2)

三角関数の加法定理より、

$$\begin{aligned} \tan \angle QOR &= \tan(\angle POR - \angle POQ) \\ &= \frac{\tan \angle POR - \tan \angle POQ}{1 + \tan \angle POR \cdot \tan \angle POQ} \\ &= \frac{\frac{2 + \sqrt{2-t^2}}{t} - \frac{2 - \sqrt{2-t^2}}{t}}{1 + \frac{2 + \sqrt{2-t^2}}{t} \cdot \frac{2 - \sqrt{2-t^2}}{t}} \\ &= \frac{2t\sqrt{2-t^2}}{t^2 + 4 - (2-t^2)} \\ &= \frac{2t\sqrt{2-t^2}}{2t^2 + 2} \\ &= \frac{t\sqrt{2-t^2}}{t^2 + 1} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \tan \angle QOR = \frac{t\sqrt{2-t^2}}{t^2 + 1}$$

(3)

$0 < t < \sqrt{2}$ のとき $\angle QOR$ は鋭角であるから、 $\angle QOR$ が最大となるのは、 $\tan \angle QOR$ が最大となるときである。(2)より、 $0 < t < \sqrt{2}$ のとき $\tan \angle QOR$ は常に正であるから、 $\tan \angle QOR$ が最大となるのは $\tan^2 \angle QOR$ が最大となるときである。

$$\begin{aligned} f(t) &= \tan^2 \angle QOR \\ &= \left(\frac{t\sqrt{2-t^2}}{t^2 + 1} \right)^2 \\ &= \frac{t^2(2-t^2)}{(t^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{(-4t^3 + 4t)(t^2 + 1)^2 - t^2(2-t^2) \cdot 2 \cdot 2t \cdot (t^2 + 1)}{(t^2 + 1)^4} \\ &= \frac{(-4t^3 + 4t)(t^2 + 1) - 4t^3(2-t^2)}{(t^2 + 1)^3} \\ &= \frac{-8t^3 + 4t}{(t^2 + 1)^3} \\ &= \frac{-8t\left(t^2 - \frac{1}{2}\right)}{(t^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

である。これより、 $f(t)$ の増減は下図の通りとなる。

t	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗	最大	↘	

以上より、 $f(t)$ は $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ で最大値を取る。則ち、 $\angle QOR$ は $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ で最大値を取る。このとき、

$$\begin{aligned} \tan \angle QOR &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

であり、 $\angle QOR$ は鋭角であるから、 $\angle QOR = 30^\circ$ である。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{1}{\sqrt{2}}, \angle QOR = 30^\circ$$

(1)

式 $y=e^x$ を辺々 x で微分すると,

$$y' = e^x$$

である。 (a_1, b_1) は $y=e^x$ 上の点であることから $b_1 = e^{a_1}$ であるため, (a_1, b_1) を通る接線は,

$$y = e^{a_1}(x - a_1) + e^{a_1} \Leftrightarrow y = e^{a_1}x + e^{a_1}(1 - a_1)$$

となり, これが $(0, 0)$ を通るから,

$$e^{a_1}(1 - a_1) = 0$$

$$1 - a_1 = 0 \quad (\because e^{a_1} > 0)$$

$$\therefore a_1 = 1$$

であり,

$$b_1 = e^{a_1} = e^1 = e$$

となる。

(答) $(a_1, b_1) = (1, e)$

(2)

$y=e^x$ 上の点 (a_n, b_n) における接線は, (1)と同様に求めて

$$y = e^{a_n}(x - a_n) + e^{a_n} \Leftrightarrow y = e^{a_n}x + e^{a_n}(1 - a_n)$$

となる。これが点 $(a_{n-1}, 0)$ を通るから,

$$0 = e^{a_n}a_{n-1} + e^{a_n}(1 - a_n)$$

$$\Leftrightarrow e^{a_n}(1 - a_n + a_{n-1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - a_n + a_{n-1} = 0 \quad (\because e^{a_n} > 0)$$

$$\therefore a_n = a_{n-1} + 1$$

とわかる。したがって,

$$a_n = a_1 + n - 1 = n$$

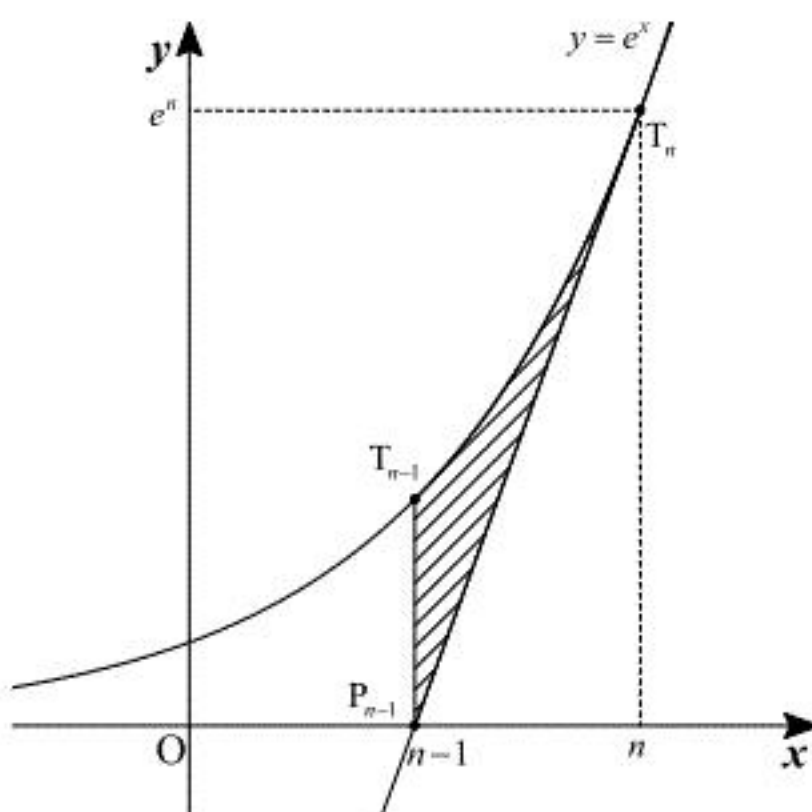
であり,

$$b_n = e^{a_n} = e^n$$

となる。

(答) $(a_n, b_n) = (n, e^n)$

(3)



S_n は上図の斜線部の面積である。上図の斜線部は, 曲線 $y=e^x$, 直線 $x=n$, 直線 $x=n-1$, x 軸で囲まれた図形から, 直線 $P_{n-1}T_n$, 直線 $x=n$, x 軸で囲まれた三角形を取り除いた図形である。以上より, S_n は,

$$S_n = \int_{n-1}^n e^x dx - \frac{1}{2} \cdot \{n - (n-1)\} \cdot e^n$$

$$= \left[e^x \right]_{n-1}^n - \frac{1}{2} e^n$$

$$= \frac{1}{2} e^n - e^{n-1}$$

である。

(答) $S_n = \frac{1}{2} e^n - e^{n-1}$

(4)

$$\sum_{n=1}^N S_n = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2} e^n - e^{n-1} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^N e^{n-1} \left(\frac{1}{2} e - 1 \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} e - 1 \right) \sum_{n=0}^{N-1} e^n$$

$$= \left(\frac{1}{2} e - 1 \right) \left(\frac{1 - e^N}{1 - e} \right)$$

である。よって,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e^N} \sum_{n=1}^N S_n \right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} e - 1 \right) \left(\frac{1 - e^N}{1 - e} \right) \cdot \frac{1}{e^N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} e - 1 \right) \cdot \frac{1}{e - 1} \cdot \left(1 - \frac{1}{e^N} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} e - 1 \right) \cdot \frac{1}{e - 1} \\ &= \frac{e - 2}{2(e - 1)} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e^N} \sum_{n=1}^N S_n \right) = \frac{e - 2}{2(e - 1)}$