

【解答】

(1)	1	2	3	
	3	2	8	
(2)	4	5	6	7
	1	5	2	8

【解説】

(1)

1から8までの数字の書かれた8枚のカードの組であるA, Bの組から、それぞれ3枚、2枚を勝手に選び出したとき、その選び方は全部で ${}_8C_3 \times {}_8C_2$ 通りあり、これらは同様に確からしく起こる。Bから選んだカードの数字が2つとも、Aから選んだカードの数字のうちの2つに一致するのは、Aの組から選んだ3枚のうち一致しない1枚のカードの選び方を考えて

$$(8-2) \times {}_8C_2 = 6 \times {}_8C_2 \text{ (通り)}$$

となるから、求める確率は

$$\frac{6 \times {}_8C_2}{{}_8C_3 \times {}_8C_2} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

であることがわかる。

(2)

Bから選んだカードの数字の1つだけが、Aから選んだカードの数字のうちの1つに一致するのは、Aの組から選んだ3枚のうち一致しない2枚のカードの選び方、およびBの組から選んだ2枚のうち一致する方のカードの選び方を考えて

$$({}_8C_2 - 1) \times 2 \times {}_8C_2 = 30 \times {}_8C_2 \text{ (通り)}$$

となるから、求める確率は

$$\frac{30 \times {}_8C_2}{{}_8C_3 \times {}_8C_2} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

であることがわかる。

〔解答〕

8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
-	2	3	5	2	2	7	1	2	-	5	4

〔解説〕

3次関数 $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x$ を x で微分して因数分解すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^2 + 2x - 4 \\ &= 2(3x+2)(2x-1) \end{aligned}$$

となるから、関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$-\frac{2}{3}$	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{2}{3}\right)$	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$

したがって、関数 $f(x)$ は $x = -\frac{2}{3}$ で極大値

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = 4\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{52}{27}$$

をとり、 $x = \frac{1}{2}$ で極小値

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$$

をとる。

xy 平面上において $y = ax^2 + bx + c$ が放物線を表すことから、 $a \neq 0$ である。この放物線 $y = ax^2 + bx + c$ が点 $(1, -3)$, $(-1, -9)$ を通ることから、条件

$$\begin{cases} -3 = a + b + c \\ -9 = a - b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = -6 \\ b = 3 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす。また、直線 $y = -5x + 4$ に接することから、2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = -5x + 4 \Leftrightarrow ax^2 + (b+5)x + c - 4 = 0$$

の判別式を D とすると、条件

$$D = 0 \Leftrightarrow (b+5)^2 - 4a(c-4) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たす。ここで、①、②を連立して、 a の値を求めると

$$\begin{aligned} (3+5)^2 - 4a\{(-a-6)-4\} &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + 10a + 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a+2)(a+8) &= 0 \\ \therefore a = -2, -8 \quad (\because a \neq 0) \end{aligned}$$

となるから、定数 a, b, c の値は

$$(a, b, c) = (-2, 3, -4), (-8, 3, 2)$$

と求まる。したがって、求める放物線の式は

$$y = -2x^2 + 3x - 4, y = -8x^2 + 3x + 2$$

である。

(答) $y = -2x^2 + 3x - 4, y = -8x^2 + 3x + 2$

(1)

正の実数 a, b に対し, a^2b は 1 以上 1000 以下, ab^2 は 1 以上 10000 以下であるから

$$1 \leq a^2b \leq 1000, 1 \leq ab^2 \leq 10000 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。この不等式の全辺の常用対数をとると, $x = \log_{10} a, y = \log_{10} b$ とおいたとき

$$\begin{aligned} \log_{10} 1 &\leq \log_{10} a^2b \leq \log_{10} 1000, \log_{10} 1 \leq \log_{10} ab^2 \leq \log_{10} 10000 \quad (\because \text{底 } 10 > 1) \\ \Leftrightarrow \log_{10} 10^0 &\leq 2\log_{10} a + \log_{10} b \leq \log_{10} 10^3, \log_{10} 10^0 \leq \log_{10} a + 2\log_{10} b \leq \log_{10} 10^4 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 2x + y \leq 3, 0 \leq x + 2y \leq 4 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となり, この連立不等式は, xy 平面上において平行四辺形を表す。ここで, 各頂点の座標は

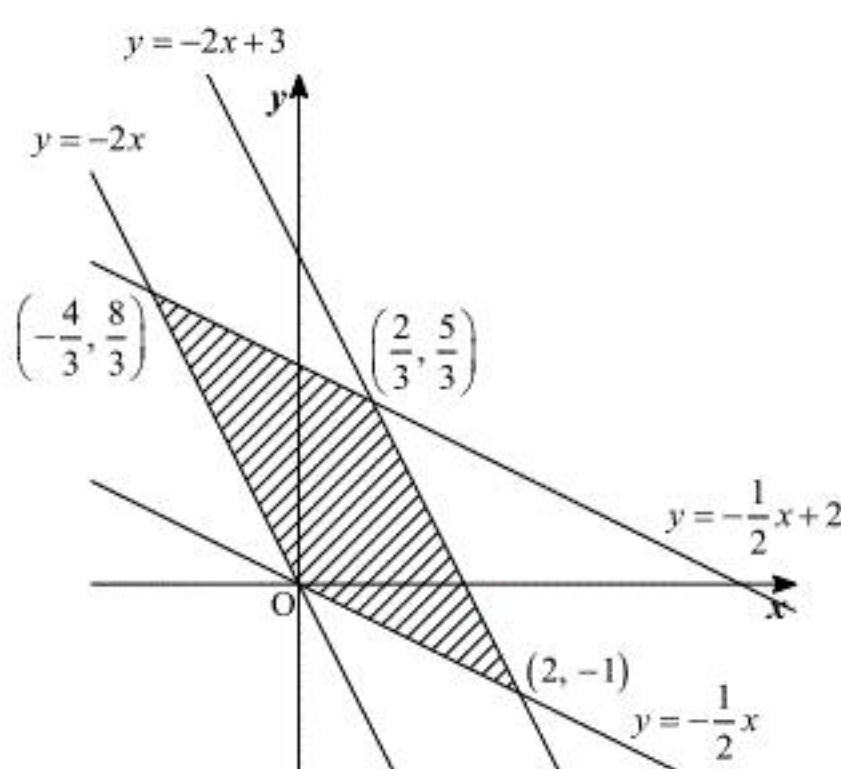
$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (2, -1)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

と求まるから, 点 (x, y) の存在しうる範囲は以下の図の斜線部のようになる。ただし, 境界をすべて含む。



(答) 前図斜線部(ただし, 境界をすべて含む)

(2)

積 ab , 商 $\frac{a}{b}$ のそれぞれについて, $ab = k_1, \frac{a}{b} = k_2$ とおき, とりうる値の範囲を W_1, W_2 とおく。

$$k_1 \in W_1 \Leftrightarrow ab = k_1 \text{ かつ } \textcircled{1} \text{ を満たす実数 } a, b \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow x + y = \log_{10} k_1 \text{ かつ } \textcircled{2} \text{ を満たす実数 } x, y \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow xy \text{ 平面上で直線 } y = -x + \log_{10} k_1 \text{ と平行四辺形 } \textcircled{2} \text{ が共有点をもつ}$$

$$k_2 \in W_2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = k_2 \text{ かつ } \textcircled{1} \text{ を満たす実数 } a, b \text{ が存在する}$$

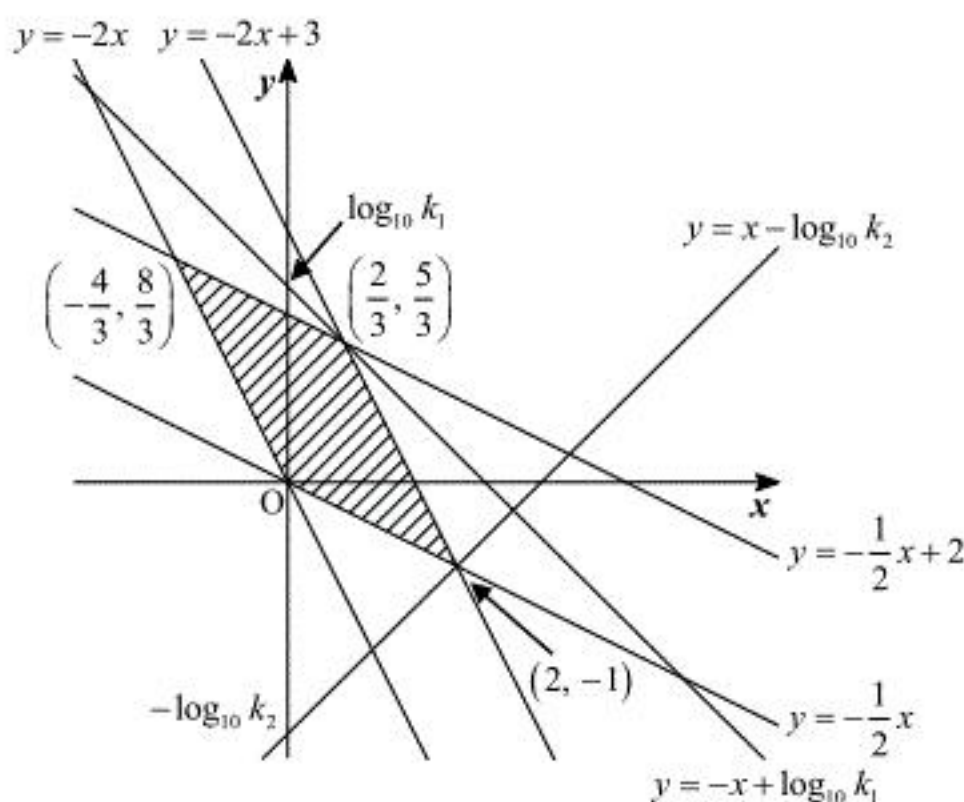
$$\Leftrightarrow x - y = \log_{10} k_2 \text{ かつ } \textcircled{2} \text{ を満たす実数 } x, y \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow xy \text{ 平面上で直線 } y = x - \log_{10} k_2 \text{ と平行四辺形 } \textcircled{2} \text{ が共有点をもつ}$$

ここで, 対数の底は $10 (> 1)$ であり, 各直線の傾きについて $-2 < -1 < -\frac{1}{2} < 1$ が成り立つから,

下図より, 直線 $y = -x + \log_{10} k_1$ が点 $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$ を通るときに k_1 は最大となり, 直線 $y = x - \log_{10} k_2$

が点 $(2, -1)$ を通るときに k_2 は最大となることがわかる。



したがって, それぞれ k_1, k_2 の最大値と, そのときの a, b の値は次のようになる。

$$\begin{cases} x + y = \log_{10} k_1 \\ (x, y) = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 10^{\frac{7}{3}} \\ (a, b) = \left(10^{\frac{2}{3}}, 10^{\frac{5}{3}}\right) \end{cases}, \begin{cases} x - y = \log_{10} k_2 \\ (x, y) = (2, -1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_2 = 1000 \\ (a, b) = (100, 0.1) \end{cases}$$

(答) 積 ab の最大値: $10^{\frac{7}{3}} \left((a, b) = \left(10^{\frac{2}{3}}, 10^{\frac{5}{3}}\right) \right)$, 商 $\frac{a}{b}$ の最大値: $1000 \left((a, b) = (100, 0.1) \right)$