

〔解答〕

(1)	1	2
	3	3
(2)	3	4
	3	7
(3)	5	6
	3	0

〔解説〕

(1)

袋の中に入っているカードを取り出す確率はそれぞれ等しいとする。青さんが引いた後、袋の中には1, 2, 3, 4, 5, 7の6枚が残っている。学さんの得点が偶数となるためには、学さんの得点の一の位が偶数であることが必要十分条件である。1, 2, 3, 4, 5, 7のそれぞれが学さんの得点の一の位になる確率は同様に確からしいから、求める確率は

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.333... \approx 33\%$$

である。

(2)

(1)と同様、学さんの得点の一の位が偶数になる確率を求める。青さんが引いた後、袋の中には1, 2, 3, 4, 7, ?が残っている。よって、学さんのカードの引き方は

$$6 \cdot 5 = 30 \text{ (通り)}$$

ある。学さんの得点が偶数になるのは、一の位が2か4であるか、または一の位が?で?が偶数となる場合である。一の位が2か4となるのは $5 + 5 = 10$ 通りである。また、一の位が?で?が偶数となる場合は十の位が7のときのみで、そのとき一の位は4になる。したがって学さんの得点が偶数となる確率は

$$\frac{10+1}{30} = 0.366... \approx 37\%$$

となる。

(3)

青さんの得点が65であるから、学さんの得点が青さんの得点を上回る可能性があるのは学さんの得点の十の位の数が7か?の場合である。

[1] 十の位の数7のとき

このとき、一の位の数何であれ必ず学さんの得点は青さんの得点を上回る。このときの学さんの得点は5通りである。

[2] 十の位の数?のとき

このとき学さんの得点が青さんを上回るための必要十分条件は?が7になることである。よって残りの1, 2, 3, 4, 7のカードのうち一の位に7以外のカードがくればよいから、このときの学さんの得点は4通りである。

以上[1], [2]より求める確率は、

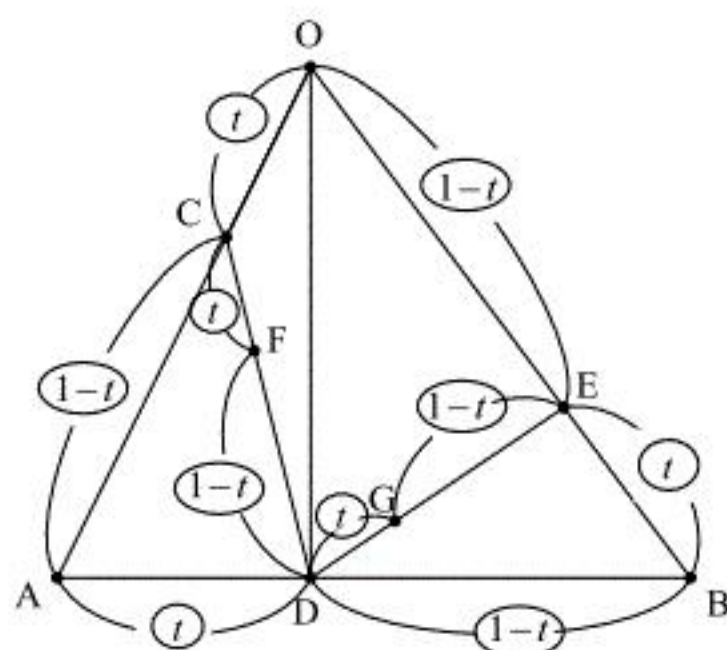
$$\frac{5+4}{30} = 0.3 = 30\%$$

である。

〔解答〕

(1)	7	8	9	1 0	1 1
	3	8	1	1	6
(2)	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
	9	1	6	3	8
(3)	1 7	1 8			
	2	3			
(4)	1 9	2 0			
	1	2			

〔解説〕



(1)

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OF} &= (1-t)\overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{OD} \\
 &= (1-t)t\overrightarrow{OA} + t\{(1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}\} \\
 &= 2t(1-t)\overrightarrow{OA} + t^2\overrightarrow{OB}
 \end{aligned}$$

であるから、 $t = \frac{1}{4}$ のとき、

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OF} &= 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \overrightarrow{OA} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \overrightarrow{OB} \\
 &= \frac{3}{8} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{16} \overrightarrow{OB}
 \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OG} &= (1-t)\overrightarrow{OD} + t\overrightarrow{OE} \\
 &= (1-t)\{(1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}\} + t(1-t)\overrightarrow{OB} \\
 &= (1-t)^2 \overrightarrow{OA} + 2t(1-t)\overrightarrow{OB}
 \end{aligned}$$

であるから、 $t = \frac{1}{4}$ のとき、

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OG} &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \overrightarrow{OB} \\
 &= \frac{9}{16} \overrightarrow{OA} + \frac{3}{8} \overrightarrow{OB}
 \end{aligned}$$

となる。

(3)

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{FG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OF} \\
 &= \{(1-t)^2 - 2t(1-t)\}\overrightarrow{OA} + \{2t(1-t) - t^2\}\overrightarrow{OB} \\
 &= (1-t)(1-3t)\overrightarrow{OA} + t(2-3t)\overrightarrow{OB}
 \end{aligned}$$

である。したがって直線 FG が辺 OA と平行になるのは、

$$\begin{aligned}
 t(2-3t) &= 0 \\
 \therefore t &= \frac{2}{3} \quad (\because 0 < t < 1)
 \end{aligned}$$

のときである。

(4)

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

である。一方、

$$\overrightarrow{FG} = (1-t)(1-3t)\overrightarrow{OA} + t(2-3t)\overrightarrow{OB}$$

であるから、直線 FG が辺 AB と平行になるのは、

$$\begin{aligned}
 (1-t)(1-3t) : t(2-3t) &= (-1) : 1 \\
 \Leftrightarrow t(3t-2) &= (1-t)(1-3t) \\
 \Leftrightarrow 3t^2 - 2t &= 3t^2 - 4t + 1 \\
 \Leftrightarrow 2t &= 1 \\
 \therefore t &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

のときである。

双曲線 $x^2 - y^2 = 4$ と直線 $y = mx - m + 1$ の方程式から y を消去すると、

$$x^2 - (mx - m + 1)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 1)x^2 + 2m(1 - m)x + (1 - m)^2 + 4 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。双曲線 $x^2 - y^2 = 4$ と直線 $y = mx - m + 1$ の共有点の個数は①の方程式の解の個数に等しいから、①の解の個数について調べる。

[1] $m = 1$ のとき

このとき①の左辺は、4 となるから、①は x の値に依らず成り立たない。すなわち、このとき①は解を持たない。

[2] $m = -1$ のとき

このとき①は、

$$-4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

より、解が1つ存在する。

[3] $m \neq \pm 1$ のとき

このとき①は2次方程式であるから、この方程式の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= m^2(1 - m)^2 - (m^2 - 1)\{(1 - m)^2 + 4\} \\ &= (1 - m)\left[m^2(1 - m) + (1 + m)\{(1 - m)^2 + 4\}\right] \\ &= (1 - m)\{m^2 - m^3 + (1 + m)(m^2 - 2m + 5)\} \\ &= -(m - 1)(3m + 5) \end{aligned}$$

となる。よって解の個数は、

$$m < -\frac{5}{3}, 1 < m \text{ のとき} \quad 0 \text{ 個}$$

$$m = -\frac{5}{3} \text{ のとき} \quad 1 \text{ 個}$$

$$-\frac{5}{3} < m < -1, -1 < m < 1 \text{ のとき} \quad 2 \text{ 個}$$

である。

以上[1], [2], [3]より、双曲線 $x^2 - y^2 = 4$ と直線 $y = mx - m + 1$ の共有点の個数は、

$$m < -\frac{5}{3}, 1 \leq m \text{ のとき} \quad 0 \text{ 個}$$

$$m = -\frac{5}{3}, -1 \text{ のとき} \quad 1 \text{ 個}$$

$$-\frac{5}{3} < m < -1, -1 < m < 1 \text{ のとき} \quad 2 \text{ 個}$$

となる。

$$(\text{答}) \begin{cases} m < -\frac{5}{3}, 1 \leq m \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ m = -\frac{5}{3}, -1 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ -\frac{5}{3} < m < -1, -1 < m < 1 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \end{cases}$$

(1)

積分定数を C とすると,

$$\begin{aligned}\int t \log t dt &= \frac{1}{2} t^2 \log t - \int \frac{1}{2} t^2 \cdot \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{1}{2} t^2 \log t - \int \frac{1}{2} t dt \\ &= \frac{1}{2} t^2 \log t - \frac{1}{4} t^2 + C\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \int t \log t dt = \frac{1}{2} t^2 \log t - \frac{1}{4} t^2 + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(2)

(1)の結果を用いると,

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_x^{2x} t \log t dt \\ &= \frac{1}{2} (2x)^2 \log(2x) - \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} \{ (2x)^2 - x^2 \} \\ &= x^2 \left(2 \log 2x - \frac{1}{2} \log x - \frac{3}{4} \right)\end{aligned}$$

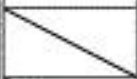
となる。

$$(\text{答}) \quad F(x) = x^2 \left(2 \log 2x - \frac{1}{2} \log x - \frac{3}{4} \right)$$

(3)

$$\begin{aligned}F'(x) &= 2x \left(2 \log 2x - \frac{1}{2} \log x - \frac{3}{4} \right) + x^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2x} \right) \\ &= x(4 \log 2x - \log x) \\ &= x \log 16x^3\end{aligned}$$

である。したがって $x > 0$ における $F(x)$ の増減表は次のようになる。

x	(0)	...	$\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$	...	(∞)
$F'(x)$		-	0	+	
$F(x)$			最小		(∞)

ここで,

$$\lim_{x \rightarrow +0} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$$

$$\begin{aligned}F\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right) &= \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} \left(2 \log \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} - \frac{3}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} \left(-\frac{2}{3} \log 2 + \frac{2}{3} \log 2 - \frac{3}{4} \right) \\ &= -\frac{3}{16\sqrt[3]{4}}\end{aligned}$$

であるから, $F(x)$ の最大値はなし, 最小値は $-\frac{3}{16\sqrt[3]{4}}$ である。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} \text{最大値: なし} \\ \text{最小値: } -\frac{3}{16\sqrt[3]{4}} \end{cases}$$

$f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ とする。 $f(x)$ の定義域は $x \neq 0$ である。 $f(x)$ の導関数および第二次導関数は、

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 + 1}{x^2}$$

$$f''(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^3}$$

である。 よって $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+		+	+	+
$f''(x)$	+	+	+		-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$		$\nearrow$	変曲点	$\nearrow$

ここで、

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}, f(1) = 0$$

であるから、関数 $y = x^2 - \frac{1}{x}$ の概形は以下のようになる。

