

【解答】

(1)	1	2										
	5	9										
(2)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
	5	4	1	2	1	2	2	1	0	1	4	
(3)	14	15	16	17	18	19	20	21				
	1	2	1	7	3	3	3	2				

【解説】

(1)

絶対値記号内の関数の正負に注意して絶対値記号を外しつつ計算すると、

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \left| x-1 - \frac{1}{3} \right| dx &= \int_0^1 \left| -(x-1) - \frac{1}{3} \right| dx + \int_1^2 \left| (x-1) - \frac{1}{3} \right| dx \\
 &= \int_0^1 \left| -x + \frac{2}{3} \right| dx + \int_1^2 \left| x - \frac{4}{3} \right| dx \\
 &= \int_0^{\frac{2}{3}} \left(-x + \frac{2}{3} \right) dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 \left(-x + \frac{2}{3} \right) dx + \int_1^{\frac{4}{3}} \left(x - \frac{4}{3} \right) dx + \int_{\frac{4}{3}}^2 \left(x - \frac{4}{3} \right) dx \\
 &= \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x \right]_0^{\frac{2}{3}} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x \right]_{\frac{2}{3}}^1 + \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x \right]_1^{\frac{4}{3}} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x \right]_{\frac{4}{3}}^2 \\
 &= \frac{2}{9} + \left(-\frac{1}{6} + \frac{2}{9} \right) + \left(\frac{8}{9} - \frac{5}{6} \right) + \left(-\frac{2}{3} + \frac{8}{9} \right) \\
 &= \frac{4-3+4+16-15-12+16}{18} \\
 &= \frac{5}{9}
 \end{aligned}$$

となる。

(2)

与えられた3点をP(0, 0), Q(3, 1), R(2, 3)とおき、原点をOとおき、平行四辺形の残りの1点

を点Sとおくと、点Sの座標としては、 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ を満たす点と、 $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{QS}$ を満たす点と、 $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS}$ を満たす点が考えられる。

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \Leftrightarrow \overrightarrow{OS} = (3, 1) + (2, 3) - (0, 0) = (5, 4)$$

$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{QS} \Leftrightarrow \overrightarrow{OS} = (0, 0) + (3, 1) - (2, 3) = (1, -2)$$

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS} \Leftrightarrow \overrightarrow{OS} = (0, 0) + (2, 3) - (3, 1) = (-1, 2)$$

であるから、点Aの座標はA(5, 4)、点Bの座標はB(-1, 2)、点Cの座標はC(1, -2)であると

分かる。これより、

$$BA = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$$

である。ここで、余弦定理より

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BA \cdot BC} \\
 &= \frac{40 + 20 - 52}{2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{5}} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{10}
 \end{aligned}$$

である。 $0 < \theta < \pi$ であることより

$$\begin{aligned}
 \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\
 &= \sqrt{1 - \frac{1}{50}} \\
 &= \frac{7\sqrt{2}}{10}
 \end{aligned}$$

が成立するから、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin \theta &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} \\
 &= 14
 \end{aligned}$$

である。

(3)

真数条件より、

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2} > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

である。この条件のもとで、

$$\begin{aligned}
 \log_{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2} \right) + \log_4 x &> 2 \\
 \Leftrightarrow \log_4 \left(x - \frac{1}{2} \right)^{-2} + \log_4 x &> \log_4 16 \\
 \Leftrightarrow \frac{x}{\left(x - \frac{1}{2} \right)^2} &> 16 \\
 \Leftrightarrow 16x^2 - 17x + 4 &< 0 \\
 \Leftrightarrow \left(x - \frac{17 - \sqrt{33}}{32} \right) \left(x - \frac{17 + \sqrt{33}}{32} \right) &< 0
 \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $x > \frac{1}{2}$ であることに注意すると、求めるxの範囲は

$$\frac{1}{2} < x < \frac{17 + \sqrt{33}}{32}$$

である。

(1)

$x, y \geq 0$ のもとで、各原料の消費量が在庫量を超えない為の必要十分条件は、

$$4x + 2y \leq 40 \text{ かつ } 2x + 5y \leq 50$$

$$\Leftrightarrow y \leq -2x + 20 \text{ かつ } y \leq -\frac{2}{5}x + 10$$

である。ここで、

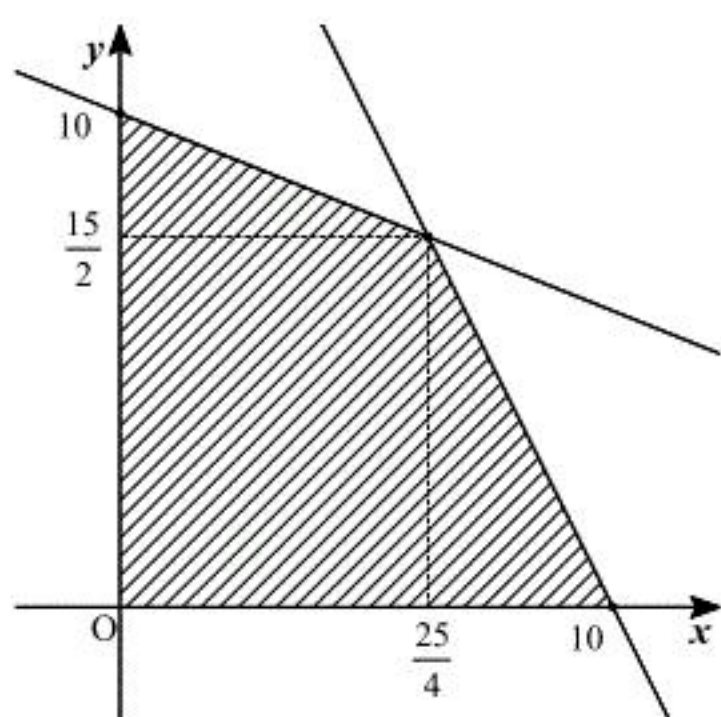
$$-2x + 20 = -\frac{2}{5}x + 10$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{25}{4}$$

であり、

$$-2 \cdot \frac{25}{4} + 20 = \frac{15}{2}$$

であるから、各原料の消費量が在庫量を超えない (x, y) の範囲を図示すると以下の通りになる。



ただし、境界を含む。

(答) 前図(ただし、境界を含む)

(2)

$x + y = k$ とおく。このとき、

$$x + y = k \Leftrightarrow y = -x + k$$

であるから、直線 $y = -x + k$ と(1)で求めた領域が交点を持つような実数 k のうち、最大のものを求めれば良い。直線 $y = -x + k$ の傾きは -1 であり、領域の境界である直線の傾きとの関係を考えて、 $-2 < -1 < -\frac{2}{5}$ である。よって、 k が最大となるときは $\left(\frac{25}{4}, \frac{15}{2}\right)$ を通るときであるとわかる。

$$(答) (x, y) = \left(\frac{25}{4}, \frac{15}{2}\right)$$

(3)

$5x + py = l$ とおく。このとき、 p が正の実数であることに気を付けると、

$$5x + py = l \Leftrightarrow y = -\frac{5}{p}x + \frac{l}{p}$$

である。(2)と同様に、直線 $y = -\frac{5}{p}x + \frac{l}{p}$ と領域の境界をなす直線との関係を考える。

[1] $-\frac{5}{p} < -2$ のとき

$$-\frac{5}{p} < -2 \Leftrightarrow p < \frac{5}{2}$$

であり、このとき l が最大値をとるのは直線 $y = -\frac{5}{p}x + \frac{l}{p}$ が点 $(10, 0)$ を通るときである。

$(x, y) = (10, 0)$ を代入すると

$$0 = -\frac{5}{p} \cdot 10 + \frac{l}{p}$$

$$\Leftrightarrow l = 50$$

となる。したがって、このときの l の最大値は 50 である。

[2] $-2 \leq -\frac{5}{p} < -\frac{2}{5}$ のとき

$$-2 \leq -\frac{5}{p} < -\frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq p < \frac{25}{2}$$

であり、このとき l が最大値をとるのは直線 $y = -\frac{5}{p}x + \frac{l}{p}$ が点 $\left(\frac{25}{4}, \frac{15}{2}\right)$ を通るときである。

る。 $(x, y) = \left(\frac{25}{4}, \frac{15}{2}\right)$ を代入すると

$$\frac{15}{2} = -\frac{5}{p} \cdot \frac{25}{4} + \frac{l}{p}$$

$$\Leftrightarrow l = \frac{15}{2}p + \frac{125}{4}$$

となる。したがって、このときの l の最大値は $\frac{15}{2}p + \frac{125}{4}$ である。

[3] $-\frac{2}{5} \leq -\frac{5}{p}$ のとき

$$-\frac{2}{5} \leq -\frac{5}{p} \Leftrightarrow \frac{25}{2} \leq p$$

であり、このとき l が最大値をとるのは直線 $y = -\frac{5}{p}x + \frac{l}{p}$ が点 $(0, 10)$ を通るときである。

$(x, y) = (0, 10)$ を代入すると

$$10 = -\frac{5}{p} \cdot 0 + \frac{l}{p}$$

$$\Leftrightarrow l = 10p$$

となる。したがって、このときの l の最大値は $10p$ である。

以上[1],[2],[3]より、 $5x + py$ の最大値は、 $p < \frac{5}{2}$ のときは 50 であり、 $\frac{5}{2} \leq p < \frac{25}{2}$ のときは

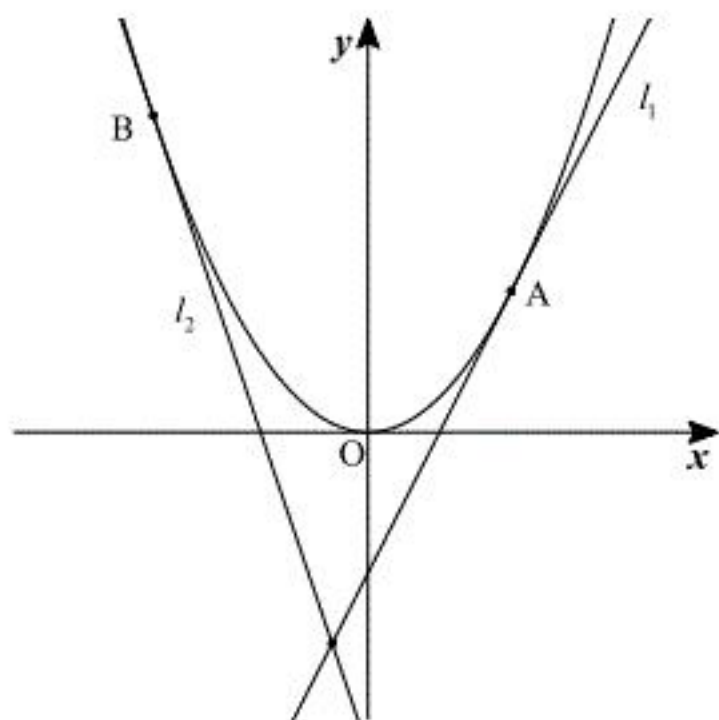
$\frac{15}{2}p + \frac{125}{4}$ であり、 $\frac{25}{2} \leq p$ のときは $10p$ である。

$$p < \frac{5}{2} \text{ のとき} \quad 50$$

$$(答) \quad \frac{5}{2} \leq p < \frac{25}{2} \text{ のとき} \quad \frac{15}{2}p + \frac{125}{4}$$

$$\frac{25}{2} \leq p \text{ のとき} \quad 10p$$

(1)



$y = x^2$ を x で微分すると

$$y' = 2x$$

が得られるから、放物線 $y = x^2$ 上の点 (t, t^2) における放物線 $y = x^2$ の接線の式は、

$$y - t^2 = 2t(x - t)$$

$$\Leftrightarrow y = 2tx - t^2$$

である。これより、 l_1, l_2 の式は、

$$l_1: y = 2ax - a^2$$

$$l_2: y = -2bx - b^2$$

であると分かる。また、これらの直線の交点の x 座標は

$$2ax - a^2 = -2bx - b^2$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b)x = a^2 - b^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a-b}{2} \quad (\because a, b > 0)$$

であり、 y 座標は

$$\begin{aligned} y &= 2a \cdot \frac{a-b}{2} - a^2 \\ &= -ab \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad l_1: y = 2ax - a^2$$

$$l_2: y = -2bx - b^2$$

$$\text{交点: } \left(\frac{a-b}{2}, -ab \right)$$

(2)

$$\begin{aligned} S &= \int_{-b}^{\frac{a-b}{2}} \{x^2 - (-2bx - b^2)\} dx + \int_{\frac{a-b}{2}}^a \{x^2 - (2ax - a^2)\} dx \\ &= \int_{-b}^{\frac{a-b}{2}} (x+b)^2 dx + \int_{\frac{a-b}{2}}^a (x-a)^2 dx \\ &= \left[\frac{(x+b)^3}{3} \right]_{-b}^{\frac{a-b}{2}} + \left[\frac{(x-a)^3}{3} \right]_{\frac{a-b}{2}}^a \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{a+b}{2} \right)^3 - \frac{1}{3} \left(-\frac{a+b}{2} \right)^3 \\ &= \frac{(a+b)^3}{12} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{(a+b)^3}{12}$$

(3)

問の条件より、

$$2a \cdot (-2b) = -1$$

$$\Leftrightarrow ab = \frac{1}{4}$$

である。このとき、 a, b はともに正の定数であるので相加相乗平均の性質より

$$a+b \leq 2\sqrt{ab} = 1$$

である。等号は、 $a, b = \frac{1}{2}$ で確かに成立する。以上より、

$$S = \frac{(a+b)^3}{12} \leq \frac{1}{12}$$

であり、等号は、 $a, b = \frac{1}{2}$ で確かに成立する。

$$(\text{答}) \quad a, b = \frac{1}{2} \text{ のとき } \frac{1}{12}$$