

【解答】

(1)	1	2	3	4
	3	3	6	2
(2)	5	6	7	
	1	5	6	
(3)	8	9	10	11
	b	d	c	a

【解説】

(1)

数学の得意な生徒と英語の得意な生徒は延べ $62+71=133$ 人いるので、全生徒が 100 人であることと合わせると、数学と英語の両方が得意な生徒は少なくとも

$$133-100=33 \text{ (人)}$$

であり、両方が得意な生徒が最大の場合は数学の得意な生徒の全員が英語も得意な場合であるから、

$$62 \text{ (人)}$$

となる。

(2)

横一列に並べた 7 個の○の 6 つの隙間に 2 個の仕切りを入れて、仕切りで区切られた○の数を左から x, y, z とすれば題意を満たす。よって、その求める組の総数は

$${}_6C_2=15 \text{ (通り)}$$

である。そのうち $x=y$ となる組は $x=y=1, 2, 3$ となる 3 通りであり、 $x < y$ となる組と $x > y$ となる組の数は対称性より等しいため、 $x > y$ を満たすものは

$$\frac{15-3}{2}=6 \text{ (通り)}$$

となる。

(3)

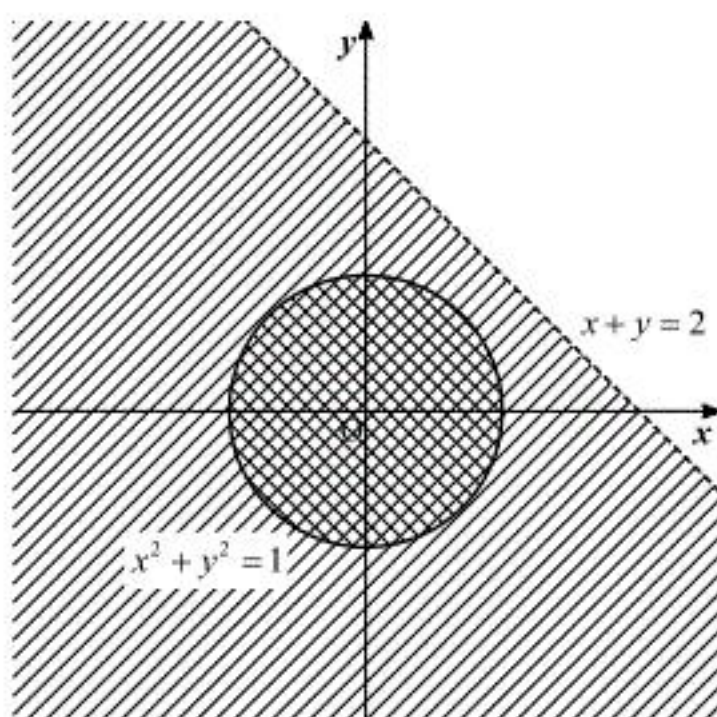
(ア)

命題『 $p^2-4q \geq 0$ ならば 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ は異なる 2 つの実数解をもつ』は偽であるが(反例: $p^2-4q=0$ のときは重解をもつ)、命題『2 次方程式 $x^2+px+q=0$ が異なる 2 つの実数解を持つならば $p^2-4q \geq 0$ である』は真である。したがって、 $p^2-4q \geq 0$ は、2 次方程式 $x^2+px+q=0$ が異なる 2 つの実数解をもつための必要条件であり、十分条件でない。

(イ)

命題『さいころを 2 回投げるとき、1 回目に 6 の目が出るならば出た目の和が 11 となる』は偽であり(反例: 1 回目に 6 が出て 2 回目に 1 が出る)、命題『さいころを 2 回投げるとき、出た目の和が 11 であるならば 1 回目に 6 の目が出る』も偽である(反例: 1 回目に 5 が出て 2 回目に 6 が出る)。したがって、さいころを 2 回投げるとき、1 回目に 6 の目が出ることは、出た目の和が 11 であるための必要条件でなく、十分条件でない。

(ウ)



$x+y < 2$ を左下斜線で、 $x^2+y^2 \leq 1$ を右下斜線で表すと上図のようになる。したがって、 $x^2+y^2 \leq 1$ は $x+y < 2$ であるための十分条件であり、必要条件でない。

(エ)

命題『3 つの自然数 l, m, n の積が奇数であるならば、 l, m, n が全て奇数である』について、対偶『 l, m, n のうち少なくとも 1 つが偶数ならば、3 つの自然数 l, m, n の積が偶数である』が真であることから命題『3 つの自然数 l, m, n の積が奇数であるならば、 l, m, n が全て奇数である』は真である。また、命題『3 つの自然数 l, m, n が全て奇数であるならば、 l, m, n の積が奇数である』も真である。したがって、3 つの自然数 l, m, n の積が奇数であることは、 l, m, n が全て奇数であるための必要十分条件である。

(1)

題意より、 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, $180^\circ < \beta < 270^\circ$ であるから、

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{\sqrt{7}}{4}, \cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

となる。また、 $270^\circ < \alpha + \beta < 450^\circ$ であるから、 $\alpha + \beta$ は第4象限または第1象限またはx軸の正の部分にある。ここで、

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{6}}{7}\right) + \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) \\ &= \frac{5\sqrt{7} - 6\sqrt{6}}{28} \end{aligned}$$

であり、 $(6\sqrt{6})^2 = 216$, $(5\sqrt{7})^2 = 175$ であるから、 $\sin(\alpha + \beta) < 0$ である。これより、 $\alpha + \beta$ は第4象限の角であることが分かる。

(答) 第4象限

(2)

$$756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$$

であるから、正の約数の個数は、

$$(2+1) \times (3+1) \times (1+1) = 24 \text{ (個)}$$

あり、それらの和は、

$$(2^0 + 2^1 + 2^2) \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3) \cdot (7^0 + 7^1) = 2240$$

である。

(答) 正の約数の個数：24個
正の約数の総和：2240

2点 $(-1, 1)$, $(1, 1)$ を結ぶ線分は、 $y=1$ ($-1 \leq x \leq 1$)と表せるから、「放物線 $y=x^2+ax+b$ が2点 $(-1, 1)$, $(1, 1)$ を結ぶ線分とただ1つの共有点を持つこと」は、「方程式 $x^2+ax+b=1$ が $-1 \leq x \leq 1$ に1つだけ実数解を持つこと」と同値である。よって、 $f(x)=x^2+ax+b-1$ とおき、以下のように場合分けをする。

(i) 重解を持たず、解が $x=-1, 1$ のいずれでもないとき

$$f(-1) \cdot f(1) = (-a+b)(a+b) < 0$$

であればよく、「 $-a+b < 0$ かつ $a+b > 0$ 」または「 $-a+b > 0$ かつ $a+b < 0$ 」となる。

(ii) 重解を持たず、一方の解が $x=-1$ であるとき、

このとき、 $-a+b=0$ である。また、もう1つの解は、

$$x^2+ax+a-1=0$$

$$\Leftrightarrow (x+a-1)(x+1)=0$$

$$\therefore x=-1, -a+1$$

より、 $x=-a+1$ であるから、 $-a+1 < -1, 1 < -a+1$ である。これをまとめると、直線 $b=a$ の $0 \leq a \leq 2$ を除く部分となる。

(iii) 重解を持たず、一方の解が $x=1$ であるとき、

このとき、 $a+b=0$ である。また、もう1つの解は、

$$x^2+ax-a-1=0$$

$$\Leftrightarrow (x+a+1)(x-1)=0$$

$$\therefore x=1, -a-1$$

より、 $x=-a-1$ であるから、 $-a-1 < -1, 1 < -a-1$ である。これをまとめると、直線 $b=-a$ の $-2 \leq a \leq 0$ を除く部分となる。

(iv) 解が重解であるとき、

$a^2-4(b-1)=0$ かつ $-1 \leq -\frac{a}{2} \leq 1$ であればよい。これをまとめると、放物線

$b=\frac{a^2}{4}+1$ の $-2 \leq a \leq 2$ の部分となる。

以上(i), (ii), (iii), (iv)より、求める範囲は図の斜線部と放物線 $b=\frac{a^2}{4}+1$ の $-2 \leq a \leq 2$ の部分になる。境界線は含むが、直線 $b=a$ の $0 \leq a < 2$ 、直線 $b=-a$ の $-2 < a \leq 0$ の部分は含まない。

