

I

【解答】

(1)	1	2	3	4	5	6	7				
	5	5	1	5	8	1	1				
(2)	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	1	1	4	5	2	8	3	1	2	1	1
(3)	19	20	21								
	－	1	4								
(4)	22	23	24	25	26						
	－	2	5	2	3						
(5)	27	28	29	30	31	32	33				
	－	3	－	5	1	1	2				

【解説】

(1)

方程式

$$4x+3y=65 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を満たす自然数の組の1つは $(x,y)=(5,15)$ であるから

$$4\cdot 5+3\cdot 15=65 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。①、②式の辺々を引くと

$$\begin{aligned} 4(x-5)+3(y-15) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(x-5) &= -3(y-15) \end{aligned}$$

となる。4と3は互いに素であるから、整数 k を用いて

$$\begin{aligned} x-5 &= 3k \\ \therefore x &= 3k+5 \end{aligned}$$

と表せる。また

$$\begin{aligned} 4\cdot 3k &= -3(y-15) \\ \therefore y &= -4k+15 \end{aligned}$$

と表せる。ここで、 x,y がともに自然数であるとき

$$\begin{aligned} x \geq 1, y \geq 1 \\ \Leftrightarrow 3k+5 \geq 1, -4k+15 \geq 1 \\ \Leftrightarrow k \geq -\frac{4}{3}, k \leq \frac{7}{2} \\ \therefore -1 \leq k \leq 3 \end{aligned}$$

である。自然数の組 (x,y) は k の値の数だけ存在するので、求める自然数の組は5組である。
また、 x の値は k の値に関して単調増加であるから、 x の値が2番目に小さい組は $k=0$ のときの $(5,15)$ であり、 x の値が3番目に小さい組は $k=1$ のときの $(8,11)$ である。

(2)

与えられた等式

$$S=1+4x+7x^2+\cdots+(1+3k)x^k+\cdots+28x^9 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

の両辺に x をかけると

$$xS=x+4x^2+7x^3+\cdots+\{1+3(k-1)\}x^k+\cdots+25x^9+28x^{10} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

となる。③、④式の辺々をひいて

$$\begin{aligned} (1-x)S &= 1+3x+3x^2+\cdots+3x^k+\cdots+3x^9-28x^{10} \\ \Leftrightarrow (1-x)S &= 3\sum_{k=0}^9 x^k - (2+28x^{10}) \end{aligned}$$

となる。よって $x \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} (1-x)S &= \frac{3(1-x^{10})}{1-x} - (2+28x^{10}) \\ \Leftrightarrow (1-x)S &= \frac{3-3x^{10}-(1-x)(2+28x^{10})}{1-x} \\ \therefore S &= \frac{28x^{11}-31x^{10}+2x+1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

である。また、 $x=1$ のとき、③式に代入して

$$S=1+4+7+\cdots+28=\sum_{k=0}^9(1+3k)=10+3\cdot\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10=145$$

である。

(3)

$A=\sqrt{2}+i, B=\sqrt{2}-i$ とおくと

$$\begin{aligned} (\sqrt{2}+i)^4+(\sqrt{2}-i)^4 &= A^4+B^4 \\ &= (A^2+B^2)^2-2A^2B^2 \\ &= \{(A+B)^2-2AB\}^2-2(AB)^2 \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、

$$\begin{aligned} A+B &= (\sqrt{2}+i)+(\sqrt{2}-i)=2\sqrt{2} \\ AB &= (\sqrt{2}+i)(\sqrt{2}-i)=2+1=3 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} (\sqrt{2}+i)^4+(\sqrt{2}-i)^4 &= \{(A+B)^2-2AB\}^2-2(AB)^2 \\ &= \{(2\sqrt{2})^2-2\cdot 3\}^2-2\cdot 3^2 \\ &= (8-6)^2-18 \\ &= 4-18 \\ &= -14 \end{aligned}$$

である。

(4)

与えられた等式

$$\begin{aligned} \int_x^a f(t)dt &= x^2-5x+6 \\ \Leftrightarrow -\int_a^x f(t)dt &= x^2-5x+6 \end{aligned}$$

の両辺を x で微分して整理すると

$$\begin{aligned} -f(x) &= 2x-5 \\ \Leftrightarrow f(x) &= -2x+5 \end{aligned}$$

となる。これを与えられた等式に代入して整理すると

$$\begin{aligned} \int_x^a (-2t+5)dt &= x^2-5x+6 \\ \Leftrightarrow [-t^2+5t]_x^a &= x^2-5x+6 \\ \Leftrightarrow -a^2+5a-(-x^2+5x) &= x^2-5x+6 \\ \Leftrightarrow a^2-5a+6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-2)(a-3) &= 0 \\ \therefore a &= 2, 3 \end{aligned}$$

となる。

(5)

3次方程式 $x^3+ax^2+7x+b=0$ が解 $1-2i$ をもつとき、その共役複素数である $1+2i$ も解である。
よって、他の解を $x=\alpha$ とおくと、

$$\begin{aligned} x^3+ax^2+7x+b &= (x-\alpha)\{x-(1-2i)\}\{x-(1+2i)\} \\ \Leftrightarrow x^3+ax^2+7x+b &= (x-\alpha)(x^2-2x+5) \\ \Leftrightarrow x^3+ax^2+7x+b &= x^3-(\alpha+2)x^2+(2\alpha+5)x-5\alpha \end{aligned}$$

が成り立つ。この等式の両辺の係数を比較して

$$\begin{cases} a=-(\alpha+2) \\ 7=2\alpha+5 \\ b=-5\alpha \end{cases}$$

となる。これを解いて

$$a=-3, b=-5, \alpha=1$$

となる。

Ⅱ

【解答】

(1)	34	35	36	37								
	1	5	7	6								
(2)	38	39										
	2	3										
(3)	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
	—	2	0	1	0	2	3	1	4	4	2	0

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}
 2y+x^2-4x+2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{2}x^2+2x-1 \\
 \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{2}(x-2)^2+1 \\
 2y+x+2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{2}x-1
 \end{aligned}$$

である。これから y を消去して整理すると

$$\begin{aligned}
 x^2-4x+2 &= x+2 \\
 \Leftrightarrow x^2-5x &= 0 \\
 \Leftrightarrow x(x-5) &= 0 \\
 \therefore x &= 0, 5
 \end{aligned}$$

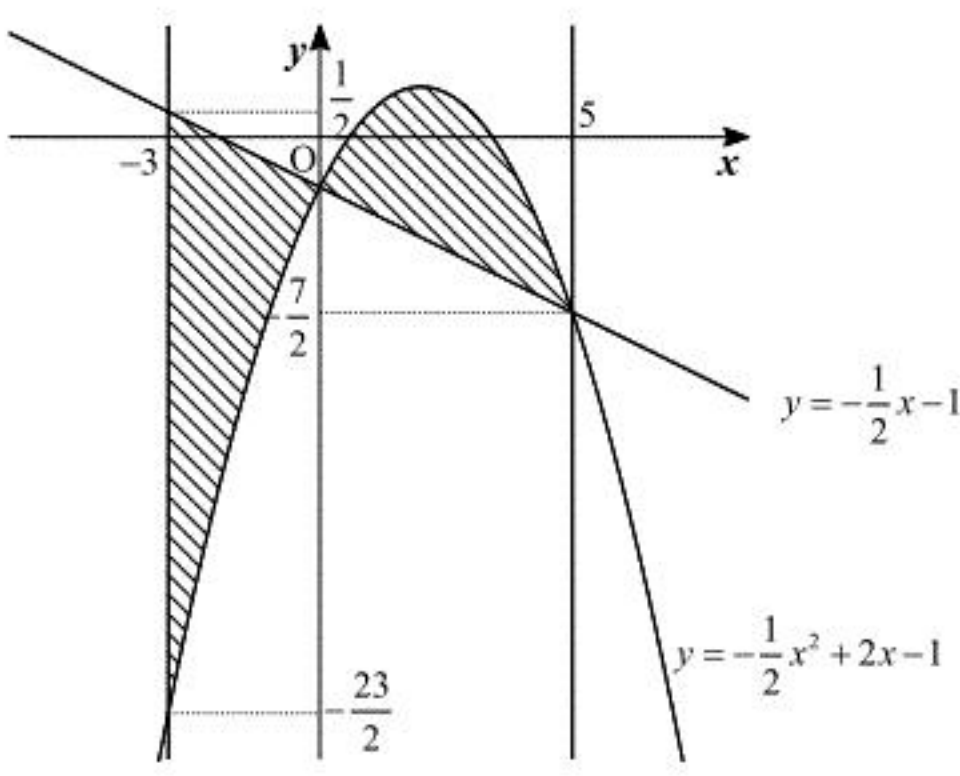
となり、交点は $(0, -1), (5, -\frac{7}{2})$ である。また、

$$\begin{aligned}
 |x-1| &\leq 4 \\
 \Leftrightarrow -4 &\leq x-1 \leq 4 \\
 \Leftrightarrow -3 &\leq x \leq 5
 \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}
 (2y+x^2-4x+2)(2y+x+2) &\leq 0 \\
 \Leftrightarrow 2y+x^2-4x+2 \leq 0, 2y+x+2 \geq 0 &\text{または } 2y+x^2-4x+2 \geq 0, 2y+x+2 \leq 0 \\
 \Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{2}x^2+2x-1, y \geq -\frac{1}{2}x-1 &\text{または } y \geq -\frac{1}{2}x^2+2x-1, y \leq -\frac{1}{2}x-1
 \end{aligned}$$

であるから、与えられた連立不等式の表す領域を図示すると以下の図の斜線部になる。ただし、境界を含む。



よって、求める面積は

$$\begin{aligned}
 &\int_{-3}^0 \left\{ -\frac{1}{2}x-1 - \left(-\frac{1}{2}x^2+2x-1 \right) \right\} dx + \int_0^5 \left\{ -\frac{1}{2}x^2+2x-1 - \left(-\frac{1}{2}x-1 \right) \right\} dx \\
 &= \int_{-3}^0 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x \right) dx - \int_0^5 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x \right) dx \\
 &= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{4}x^2 \right]_{-3}^0 - \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{4}x^2 \right]_0^5 \\
 &= 0 - \left(-\frac{9}{2} - \frac{45}{4} \right) - \left(\frac{125}{6} - \frac{125}{4} \right) + 0 \\
 &= \frac{157}{6}
 \end{aligned}$$

である。

(2)

$\frac{x+y+2}{x-y+4} = k$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 \frac{x+y+2}{x-y+4} &= k \\
 \Leftrightarrow x+y+2-k(x-y+4) &= 0 \text{ かつ } x-y+4 \neq 0 \quad \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

となる。 $x+y+2-k(x-y+4)=0$ は、 k の値にかかわらず直線 $x+y+2=0$ と直線 $x-y+4=0$ の交点を通る直線である。ここで、直線 $x+y+2=0$ と直線 $x-y+4=0$ の交点について、連立方程式

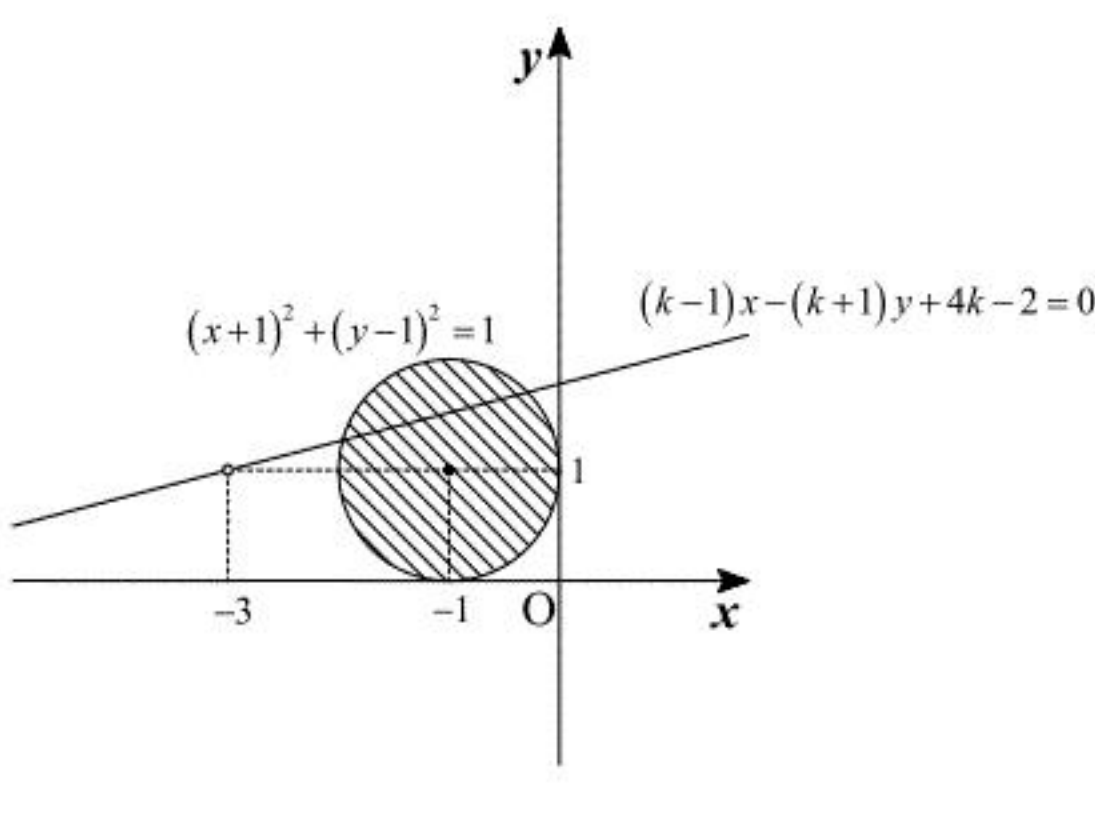
$$\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y+4=0 \end{cases}$$

を解くと、 $(x, y) = (-3, 1)$ となる。したがって、①は定点 $(-3, 1)$ を通る直線となる。ただし、点 $(-3, 1)$ を除く。ここで、①を変形すると、

$$(k-1)x - (k+1)y + 4k - 2 = 0 \text{ かつ } (x, y) \neq (-3, 1) \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。

また、 $(x+1)^2 + (y-1)^2 - 1 \leq 0$ が示す領域は下図斜線部のように中心 $(-1, 1)$ 、半径1の円の円周および内部である。



②とこの円が交わるときの k の最大値を求めればよい。このとき、②と円の中心 $(-1, 1)$ の距離が1以下であるので、

$$\begin{aligned}
 \frac{|(k-1) \cdot (-1) - (k+1) \cdot 1 + 4k - 2|}{\sqrt{(k-1)^2 + (k+1)^2}} &\leq 1 \\
 \Leftrightarrow |2k-2| &\leq \sqrt{2k^2+2}
 \end{aligned}$$

である。両辺正であるから、両辺を二乗すると

$$\begin{aligned}
 4k^2 - 8k + 4 &\leq 2k^2 + 2 \\
 \Leftrightarrow 2k^2 - 8k + 2 &\leq 0 \\
 \Leftrightarrow k^2 - 4k + 1 &\leq 0 \\
 \therefore 2 - \sqrt{3} &\leq k \leq 2 + \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

となる。したがって、 k の最大値、すなわち $\frac{x+y+2}{x-y+4}$ の最大値は $2 + \sqrt{3}$ である。

(3)

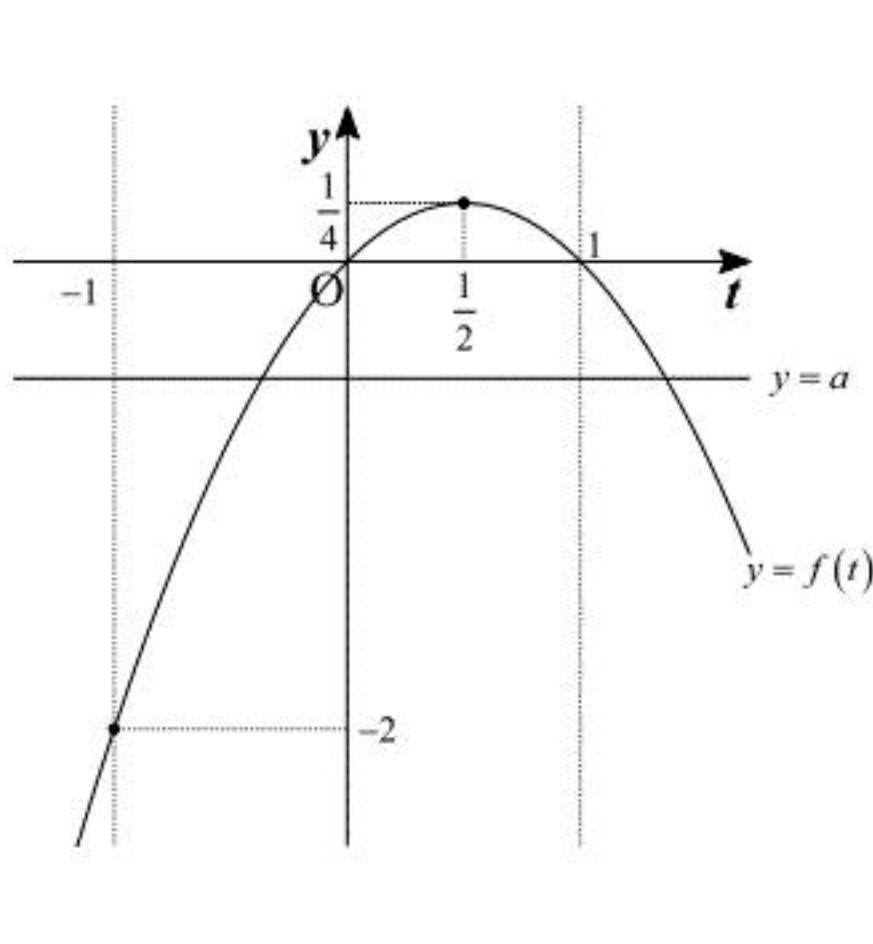
与えられた x についての方程式を整理すると

$$\begin{aligned}
 \cos^2 x + \sin x - a - 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 1 - \sin^2 x + \sin x - a - 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow -\sin^2 x + \sin x &= a
 \end{aligned}$$

となる。 $\sin x = t$ とおくと、 $0 \leq x < 2\pi$ において $-1 \leq t \leq 1$ であり、方程式は

$$-t^2 + t = a$$

となる。 $f(t) = -t^2 + t = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ とおくと、方程式 $-t^2 + t = a$ の実数解の個数は、放物線 $y = f(t)$ と直線 $y = a$ との交点の個数に等しい。放物線 $y = f(t)$ と直線 $y = a$ を図示すると以下のようになる。



図より、 $-1 \leq t \leq 1$ における放物線 $y = f(t)$ と直線 $y = a$ との交点の個数は

$$\begin{aligned}
 a < -2, \frac{1}{4} < a &\text{のとき、} 0 \text{ 個} \\
 -2 \leq a < 0, a = \frac{1}{4} &\text{のとき、} 1 \text{ 個} \\
 0 < a < \frac{1}{4} &\text{のとき、} 2 \text{ 個}
 \end{aligned}$$

である。ここで、 $t = \sin x$ と置いたことより、 t に対応する x の数は

$$\begin{aligned}
 -1 < t < 1 &\text{のとき、} 2 \text{ 個} \\
 t = \pm 1 &\text{のとき、} 1 \text{ 個}
 \end{aligned}$$

であるから、方程式の $0 \leq x < 2\pi$ における異なる実数解の個数は

$$\begin{aligned}
 a < -2 &\text{のとき、} 0 \text{ 個} \\
 a = -2 &\text{のとき、} 1 \text{ 個} \\
 -2 < a < 0 &\text{のとき、} 2 \text{ 個} \\
 a = 0 &\text{のとき、} 3 \text{ 個} \\
 0 < a < \frac{1}{4} &\text{のとき、} 4 \text{ 個} \\
 a = \frac{1}{4} &\text{のとき、} 2 \text{ 個} \\
 \frac{1}{4} < a &\text{のとき、} 0 \text{ 個}
 \end{aligned}$$

である。

Ⅲ

〔解答〕

(1)	52	53	54	55	56	57	58	59	60
	6	3	2	5	6	1	8	2	3
(2)	61	62	63	64	65	66			
	1	2	–	1	1	2			
(3)	67	68	69	70					
	8	4	9	6					

〔解説〕

(1)

1.

さいころはすべての目がでることが同様に確からしいとする。ゲームを10回行ったのち、Aが10枚、Bが20枚の硬貨を持っている確率は、10回のうち、さいころの目が偶数である場合と奇数である場合の数がともに5回ずつである確率であるから

$${}_{10}\text{C}_5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{252}{1024}=\frac{63}{256}$$

となる。

2.

ゲームを4回行ったとき、4回のゲーム終了時に初めてAが10枚、Bが20枚の硬貨を持つ状態に戻る確率は、さいころが順番に、偶数、偶数、奇数、奇数または、奇数、奇数、偶数、偶数である確率であるから

$$2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$$

である。

3.

求める確率を p とする。Bの硬貨がなくなる確率を求める。まず、Bの硬貨が10枚になる確率を考える。Aの硬貨が0枚になってしまうと操作が終わってしまうから、Bの硬貨が10枚になるのはAの硬貨が10枚減るより前にBの硬貨が10枚減る場合である。対称性よりその確率はAの硬貨が先に10枚減る確率に等しい。また、A、Bのどちらかは先に硬貨が10減ってしまう。よって、その確率の和は1であり、互いに等しいことから、それぞれの硬貨が先に10枚減る確率は $\frac{1}{2}$ である。Bの硬貨が10枚になったとき、Aの硬貨は20枚である。これは、初期状態のA、Bが入れ替わった状態になっている。よって、この状態からBの硬貨がなくなる確率は p である。よって、Bの硬貨がなくなる確率は $\frac{1}{2}p$ である。また、どちらかの硬貨がなくなるまでゲームを続けるということは、Aの硬貨がなくなるかBの硬貨がなくなるかのどちらかの事象が起こり、それらの事象が起こる確率の合計は1であるから

$$p+\frac{1}{2}p=1\Leftrightarrow p=\frac{2}{3}$$

となる。

(2)

1.

与えられた母集団の母平均は

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^nk=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)=\frac{1+n}{2}$$

である。

2.

1.で求めた母平均を μ とおくと、母集団の母分散は

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n(k-\mu)^2&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n(k^2-2\mu k+\mu^2)\\&=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)-\frac{2\mu}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)+\frac{1}{n}\cdot n\mu^2\\&=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-2\mu^2+\mu^2\\&=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\mu^2\\&=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\left(\frac{1+n}{2}\right)^2\\&=\frac{-1+n^2}{12}\end{aligned}$$

である。

(3)

母比率の推定値は $\frac{90}{100}=0.9$ であるから、95%信頼区間は

$$\begin{aligned}0.9-1.96\times\sqrt{\frac{0.9(1-0.9)}{100}}&\leq p\leq 0.9+1.96\times\sqrt{\frac{0.9(1-0.9)}{100}}\\&\Leftrightarrow 0.9-1.96\times 0.03\leq p\leq 0.9+1.96\times 0.03\\&\Leftrightarrow 0.8412\leq p\leq 0.9588\\&\therefore 0.84\leq p\leq 0.96\end{aligned}$$

となる。

(1)

①の仮定のもとで、 $f(1) \geq 2$ となることを背理法を用いて示す。すなわち、①の仮定のもとで、 $f(1) < 2$ と仮定して矛盾を導く。関数 $m = f(k)$ は自然数 k ($1 \leq k \leq n$) に自然数 m ($1 \leq m \leq n$) を対応させる関数であるから、 $f(1) < 2$ であるとき、 $f(1) = 1$ である。しかし、これは①の仮定に反し矛盾である。以上より背理法によって、①の仮定のもとで、 $f(1) \geq 2$ となることが示された。

(証明終)

(2)

①の仮定のもとで、 $k \geq 1$ に対して

$$f(k) \geq k+1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となることを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $k=1$ のとき

(1)より $f(1) \geq 2 = 1+1$ であるから、②を満たす。

[2] $k=l$ のとき

このとき、②を満たす、つまり $f(l) \geq l+1$ が成り立つと仮定する。関数の性質より

$$f(l) \leq f(l+1)$$

であるから、

$$f(l+1) \geq f(l) \geq l+1$$

である。また、①の仮定より

$$f(l+1) \neq l+1$$

である。したがって、

$$f(l+1) \geq l+2 = (l+1)+1$$

となる。よって、 $k=l+1$ のときも②を満たす。

以上[1], [2]より、数学的帰納法により、①の仮定のもとで、 $k \geq 1$ に対して $f(k) \geq k+1$ となることが示された。

(証明終)

(3)

$f(m) = m$ となる自然数 m ($1 \leq m \leq n$) が存在することを背理法で証明する。すなわち、①を仮定して矛盾を導く。(2)より、①を仮定すると、 $k \geq 1$ に対して $f(k) \geq k+1$ となる。このとき、 $k=n$ の場合を考えると、

$$f(n) \geq n+1$$

となる。一方、関数の定義より

$$1 \leq f(n) \leq n$$

である。これらを同時に満たす値 $f(n)$ は存在しないため、これは矛盾である。以上より、背理法によって、 $f(m) = m$ となる自然数 m ($1 \leq m \leq n$) が存在することが示された。

(証明終)