

【解答】

(1)	1	2		
	7	8		
(2)	3	4	5	6
	2	7	6	4

【解説】

(1)

コインを投げたときに表、裏のそれぞれが出る確率は同様に確からしい。それぞれが出る確率はいずれも $\frac{1}{2}$ である。よって、コイン3枚を同時に投げたとき、すべてのコインが裏となる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

である。したがって、少なくとも1枚のコインが表となる確率は、

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

である。

(2)

コイン3枚を同時に投げたときの状態で場合分けして考える。

[1] 3枚とも表であった場合

この状態になる確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

である。このとき、3枚のコインはすべて表になっている。

[2] 2枚が表で1枚が裏であった場合

この状態になる確率は、

$${}_3C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

である。このとき、裏になったコインを拾ってもう一度投げた後、3枚のコインがすべて表になる確率は $\frac{1}{2}$ であるから、この場合の確率は

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

である。

[3] 1枚が表で2枚が裏であった場合

この状態になる確率は、

$${}_3C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

である。このとき、裏になったコインを拾ってもう一度投げた後、3枚のコインがすべて表になる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ であるから、この場合の確率は

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$$

である。

[4] 3枚とも裏であった場合

この状態になる確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

である。このとき、裏になったコインを拾ってもう一度投げた後、3枚のコインがすべて表になる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ であるから、この場合の確率は

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$$

である。

以上、[1], [2], [3], [4]より、求める確率は、

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \frac{1}{64} = \frac{27}{64}$$

となる。

〔解答〕

(1)	7	8	9	10	11	12
	1	5	1	1	8	5
(2)	13	14	15	16	17	
	2	5	2	9	0	

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}
 AC^2 + BC^2 &= \{(t-4)^2 + (-2t+1-1)^2\} + \{(t-2)^2 + (-2t+1-3)^2\} \\
 &= 10t^2 - 4t + 24 \\
 &= 10\left(t - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{118}{5}
 \end{aligned}$$

であるから、 $AC^2 + BC^2$ は $t = \frac{1}{5}$ で最小値 $\frac{118}{5}$ をとる。

(2)

点Cは直線 $y = -2x + 1$ 上にあり、この直線を l とする。 $(-2) \cdot 4 + 1 < 1$, $(-2) \cdot 2 + 1 < 3$ より、点A, Bは直線 l に対して同じ側にあるから、直線 l に対して点Bと対称な点B'を考える。すると、直線BB'は直線 l と直交する。点B'の座標を (a, b) とおく。ここで、 $a = 2$ と仮定すると、直線BB'が y 軸と平行になってしまい直線BB'が直線 l と直交するということに矛盾する。よって、 $a \neq 2$ である。直線BB'が直線 l と直交することから、

$$\begin{aligned}
 \frac{b-3}{a-2} &= \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow a-2b &= -4 \quad (\because a \neq 2) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

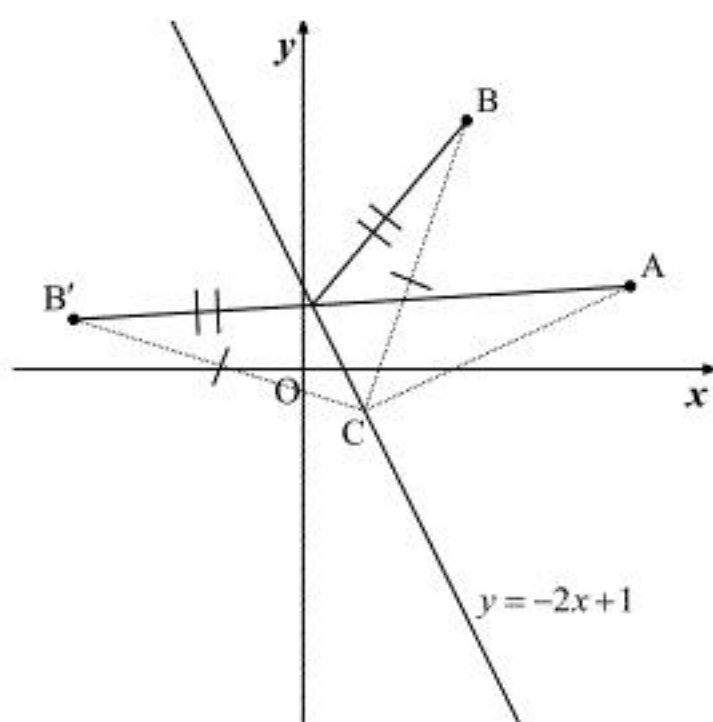
である。また、点B, B'の中点が直線 l 上にあることから、

$$\begin{aligned}
 \frac{b+3}{2} &= -2 \cdot \frac{a+2}{2} + 1 \\
 \Leftrightarrow 2a+b &= -5 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

である。①、②を解くと、

$$a = -\frac{14}{5}, b = \frac{3}{5}$$

となるから、 $B'\left(-\frac{14}{5}, \frac{3}{5}\right)$ である。



上図のように $AC + BC = AC + B'C \geq AB'$ であるから、点Cが線分AB'にあるような l をとれば、 $AC + BC$ は最小値

$$\sqrt{\left\{4 - \left(-\frac{14}{5}\right)\right\}^2 + \left\{1 - \frac{3}{5}\right\}^2} = \frac{2}{5}\sqrt{290}$$

をとる。

〔解答〕

18	19	20	21	22
2	2	3	7	6

〔解説〕

常用対数を考えると、

$$\begin{aligned}
 \log_{10}(2^{40} \times 3^{20}) &= 40 \log_{10} 2 + 20 \log_{10} 3 \\
 &= 40 \cdot 0.3010 + 20 \cdot 0.4771 \\
 &= 21.582
 \end{aligned}$$

であり、また、

$$\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2 \log_{10} 2 = 2 \cdot 0.3010 = 0.6020$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 21.4771 &< 21.582 < 21.6020 \\
 \Leftrightarrow \log_{10}(3 \times 10^{21}) &< \log_{10}(2^{40} \times 3^{20}) < \log_{10}(4 \times 10^{21}) \\
 \Leftrightarrow 3 \times 10^{21} &< 2^{40} \times 3^{20} < 4 \times 10^{21}
 \end{aligned}$$

となる。よって、 $2^{40} \times 3^{20}$ の桁数は 22 であり、最高位の数字は 3 である。また、100 を法として計算すると、

$$\begin{aligned}
 2^{40} \times 3^{20} &\equiv 12^{20} \\
 &\equiv 144^{10} \\
 &\equiv 44^{10} \\
 &\equiv 1936^5 \\
 &\equiv 36^5 \\
 &\equiv 1296^2 \cdot 36 \\
 &\equiv (-4)^2 \cdot 36 \\
 &\equiv 576 \\
 &\equiv 76 \pmod{100}
 \end{aligned}$$

となるから、 $2^{40} \times 3^{20}$ の十の位の数字は 7、一の位の数字は 6 である。

IV

【解答】

(1)	23	24	25	26	27
	1	2	5	2	5
(2)	28	29			
	1	5			
(3)	30	31			
	4	5			

【解説】

(1)

点Pが直線 ℓ_1, ℓ_2 の交点上にあるとき、

$$\begin{cases} 2s+3t=6 \\ s+4t=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=\frac{12}{5} \\ t=\frac{2}{5} \end{cases}$$

となるから、

$$\overrightarrow{OE} = \frac{12}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$$

である。

(2)

点Pが直線 ℓ_1, OA の交点上にあるとき、

$$\begin{cases} 2s+3t=6 \\ t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=3 \\ t=0 \end{cases}$$

となるから、

$$\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA}$$

である。同様に、点Pが直線 ℓ_1, OB の交点上にあるとき、

$$\begin{cases} 2s+3t=6 \\ s=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=0 \\ t=2 \end{cases}$$

となるから、

$$\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OB}$$

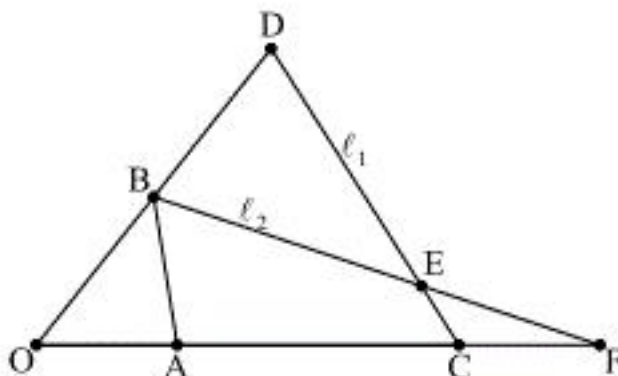
である。よって、

$$\frac{CE}{CD} = \frac{|\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}|} = \frac{\left| -\frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} \right|}{\left| -3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} \right|} = \frac{1}{5}$$

である。

(3)

三角形OAB及び点C, D, E, Fは以下の図のようになる。



上図より、

$$\begin{aligned} (\text{三角形 ACE の面積}) &= \frac{1}{5} (\text{三角形 ACD の面積}) \left(\because \frac{CE}{CD} = \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{1}{5} \cdot 2 (\text{三角形 OAD の面積}) \left(\because \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA} \right) \\ &= \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot 2 (\text{三角形 OAB の面積}) \left(\because \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OB} \right) \\ &= \frac{4}{5} (\text{三角形 OAB の面積}) \end{aligned}$$

であるから、三角形ACEの面積は、三角形OABの面積の $\frac{4}{5}$ 倍である。