

〔解答〕

(1)	1	2	3		
	1	4	8		
(2)	4	5	6	7	8
	4	4	0	3	2

〔解説〕

(1)

A 線のバス、B 線のバス、C 線のバス、それぞれの正午から数えた台数を x, y, z (x, y, z は自然数) とする。B 線のバスと C 線のバスが同時に発車するとき、正午から経過した時間を考えると、

$$\begin{aligned} 21(y-1)+1 &= 9(z-1)+1 \\ \Leftrightarrow 7(y-1) &= 3(z-1) \end{aligned}$$

が成り立つ。3 と 7 は互いに素であるので、整数 k を用いて

$$\begin{aligned} y-1 &= 3k, z-1 = 7k \\ \Leftrightarrow y &= 3k+1, z = 7k+1 \end{aligned}$$

と表すことができる。このとき、 y, z は自然数であるから、 k は 0 以上の整数である。したがって、 $k=1$ に対応するバスの時刻が、2 度目に同時に発車する時刻であるため、このときの C 線のバスは最初から数えて $7 \cdot 1 + 1 = 8$ (台目) である。また、正午から経過した時間は $9 \cdot (8-1) + 1 = 64$ (分) であるから、2 度目に正午より後に B 線のバスと C 線のバスが同時に発車する時刻は午後 1 時 4 分である。

(1)[別解]

21 と 9 の最小公倍数は 63 であるため、B 線のバスと C 線のバスは初めて同時に発車してから、63 分ごとに同時に発車する。したがって、B 線のバスと C 線のバスは正午の 1 分後に同時に発車したことから、次に同時に発車するのはその 63 分後であり、午後 1 時 4 分である。また、このときの C 線のバスは、

$$\frac{63}{9} + 1 = 8 \text{ (台目)}$$

である。

(2)

A 線のバスと C 線のバスが同時に発車するとき、(1)と同様に正午から経過した時間を考えると、

$$\begin{aligned} 35(x-1) &= 9(z-1)+1 \\ \Leftrightarrow 35(x-1)-9(z-1) &= 1 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、

$$35 \cdot (-1) - 9 \cdot (-4) = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

であるから、 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned} 35\{(x-1)-(-1)\} - 9\{(z-1)-(-4)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow 35x &= 9(z+3) \end{aligned}$$

となる。ここで、9 と 35 は互いに素であるので、整数 l を用いて

$$\begin{aligned} x &= 9l, z+3 = 35l \\ \Leftrightarrow x &= 9l, z = 35l-3 \end{aligned}$$

と表すことができる。このとき、 x, z は自然数であるため、 l は自然数である。したがって、 $l=1$ に対応するバスの時刻が、正午より後に同時に発車する最も早い時刻であるため、C 線のバスは最初から数えて $z = 35 \cdot 1 - 3 = 32$ (台目) である。また、正午から経過した時間は $9 \cdot (32-1) + 1 = 280$ (分) であるから、その時刻は午後 4 時 40 分である。

Ⅱ

〔解答〕

9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
－	1	4	5	4	5	5	2	5	5

〔解説〕

①式の両辺の絶対値を取ると、

$$\begin{aligned}
 |z| - 1 &= |(-1 + 2i)z| \\
 \Leftrightarrow |z| - 1 &= |(-1 + 2i)||z| \\
 \Leftrightarrow |z| - 1 &= (\sqrt{5}|z|) \\
 \Leftrightarrow |z|^2 - 2|z| + 1 &= 5|z|^2 \\
 \Leftrightarrow 4|z|^2 + 2|z| - 1 &= 0 \\
 \therefore |z| &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} (\because |z| > 0)
 \end{aligned}$$

となる。これを①式に代入して

$$\begin{aligned}
 |z| - 1 &= (-1 + 2i)z \\
 \Leftrightarrow \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} - 1 &= (-1 + 2i)z \\
 \Leftrightarrow \frac{-5 + \sqrt{5}}{4} \cdot \frac{1}{-1 + 2i} &= z \\
 \Leftrightarrow z &= \frac{5 - \sqrt{5}}{20}(1 + 2i) \\
 \Leftrightarrow z &= \frac{5\sqrt{5} - 5}{20} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}i \right) \\
 \therefore z &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \left(\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5}i \right)
 \end{aligned}$$

となる。したがって、 z の偏角 θ とすると

$$\cos \theta + i \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5}i$$

となる。

〔別解〕

①式の両辺の絶対値を取ると、

$$\begin{aligned}
 |z| - 1 &= |(-1 + 2i)z| \\
 \Leftrightarrow |z| - 1 &= |(-1 + 2i)||z| \\
 \Leftrightarrow |z| - 1 &= (\sqrt{5}|z|) \\
 \Leftrightarrow |z|^2 - 2|z| + 1 &= 5|z|^2 \\
 \Leftrightarrow 4|z|^2 + 2|z| - 1 &= 0 \\
 \therefore |z| &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} (\because |z| > 0)
 \end{aligned}$$

となる。また、問題文中の z の偏角 θ を用いて、 $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ とすると、

$$\begin{aligned}
 (-1 + 2i)z &= |z|(-1 + 2i)(\cos \theta + i \sin \theta) \\
 \therefore (-1 + 2i)z &= |z|\{(-\cos \theta - 2 \sin \theta) + i(2 \cos \theta - \sin \theta)\} \quad \cdots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

である。ここで、①式より $(-1 + 2i)z$ は実数であるから、②の虚数部分は0であり、

$$\begin{aligned}
 2 \cos \theta - \sin \theta &= 0 \\
 \Leftrightarrow \sin \theta &= 2 \cos \theta
 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}
 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta &= 1 \\
 \Leftrightarrow \cos^2 \theta + 4 \cos^2 \theta &= 1 \\
 \therefore \cos \theta &= \pm \frac{\sqrt{5}}{5}
 \end{aligned}$$

である。このとき

$$\sin \theta = 2 \cos \theta = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ (複合同順)}$$

である。また、 $(-1 + 2i)z = |z| - 1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} - 1 < 0$ であることから、②より

$$\begin{aligned}
 -\cos \theta - 2 \sin \theta &< 0 \\
 \Leftrightarrow -\cos \theta - 4 \cos \theta &< 0 \\
 \therefore \cos \theta &> 0
 \end{aligned}$$

である。したがって、 $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ であり、 $\cos \theta + i \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5}i$ である。

Ⅲ

〔解答〕

(1)	19	20		
	1	2		
(2)	21	22		
	3	4		
(3)	23	24	25	26
	1	4	1	2
(4)	27	28	29	30
	2	3	1	6

〔解説〕

(1)

ある時刻に点 P, Q が同じ頂点上にあるとき, 1分後にそれぞれが異なる頂点に移動するのは点 P, Q がそれぞれ互いに異なる頂点に移動する場合であるから, 求める確率は,

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

となる。

(2)

余事象を考える。ある時刻に点 P, Q が異なる頂点上にあるとき, 1分後にそれぞれが異なる頂点に移動する場合の余事象は, 2点のどちらもない頂点に点 P, Q が移動する場合である。よって その確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である。したがって, 求める確率は,

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

となる。

(3)

n 分後に点 P, Q が同じ頂点にある確率は $1 - p_n$, 異なる頂点にある確率は p_n である。これと (1), (2) より, 確率漸化式を立てると,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{2}(1 - p_n) + \frac{3}{4}p_n \\ \Leftrightarrow p_{n+1} &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

(4)

(3)より,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow p_{n+1} - \frac{2}{3} &= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

である。(1)より $p_1 = \frac{1}{2}$ であるため, 数列 $\left\{p_n - \frac{2}{3}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$, 公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列である。したがって,

$$\begin{aligned} p_n - \frac{2}{3} &= -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ \therefore p_n &= \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

である。

Ⅳ

〔解答〕

(1)	31	32	33	34		
	4	1	0	5		
(2)	35	36				
	4	5				
(3)	37	38	39	40	41	42
	1	5	1	2	1	2

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}
 AB &= |\overrightarrow{AB}| \\
 &= \sqrt{(\vec{b} - \vec{a})^2} \\
 &= \sqrt{|\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2} \\
 &= \sqrt{2^2 - 2 \cdot \frac{4}{5} + 2^2} \\
 &= \sqrt{\frac{32}{5}} \\
 &= \frac{4\sqrt{10}}{5}
 \end{aligned}$$

である。

(1)[別解]

△OABにおいて余弦定理より

$$\begin{aligned}
 AB^2 &= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB \\
 \Leftrightarrow AB^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \\
 \Leftrightarrow AB^2 &= 4 + 4 - 2 \cdot \frac{4}{5} \\
 \therefore AB &= \frac{4\sqrt{10}}{5} \quad (\because AB > 0)
 \end{aligned}$$

である。

(2)

△OABと△OBCと△OCAについて、△ABCは正三角形であるから $AB = BC = CA$ であり、また、問題文より $OA = OB = OC = 2$ である。したがって、三辺相等より、 $\triangle OAB \cong \triangle OBC \cong \triangle OCA$ である。よって、 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA$ であるから、

$$\begin{aligned}
 \vec{b} \cdot \vec{c} &= |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \angle BOC \\
 &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle AOB \\
 &= \vec{a} \cdot \vec{b} \\
 &= \frac{4}{5} \\
 \vec{c} \cdot \vec{a} &= |\vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \angle COA \\
 &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle AOB \\
 &= \vec{a} \cdot \vec{b} \\
 &= \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

である。

(3)

点Pは辺OA上に、点Qは辺BC上にあるので、 $0 \leq k \leq 1, 0 \leq s \leq 1$ を満たす実数 k, s を用いて

$$\overrightarrow{OP} = k\vec{a}, \overrightarrow{OQ} = s\vec{b} + (1-s)\vec{c}$$

と表すことができる。したがって、

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = -k\vec{a} + s\vec{b} + (1-s)\vec{c}$$

となる。 $PQ \perp OA, PQ \perp BC$ から $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OA} = 0, \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ であるので、

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OA} &= 0 \\
 \Leftrightarrow (-k\vec{a} + s\vec{b} + (1-s)\vec{c}) \cdot \vec{a} &= 0 \\
 \Leftrightarrow -k|\vec{a}|^2 + s\vec{a} \cdot \vec{b} + (1-s)\vec{c} \cdot \vec{a} &= 0 \\
 \Leftrightarrow -4k + \frac{4}{5}s + \frac{4}{5}(1-s) &= 0 \\
 \therefore k &= \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0 \\
 \Leftrightarrow (-k\vec{a} + s\vec{b} + (1-s)\vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) &= 0 \\
 \Leftrightarrow -k\vec{c} \cdot \vec{a} + s\vec{b} \cdot \vec{c} + (1-s)|\vec{c}|^2 + k\vec{a} \cdot \vec{b} - s|\vec{b}|^2 - (1-s)\vec{b} \cdot \vec{c} &= 0 \\
 \Leftrightarrow -\frac{4}{5}k + \frac{4}{5}s + (1-s)4 + \frac{4}{5}k - 4s - \frac{4}{5}(1-s) &= 0 \\
 \therefore s &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

である。これらは $0 \leq k \leq 1, 0 \leq s \leq 1$ を満たす。したがって、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{5}\vec{a}, \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

である。

【解答】

(1)	43	44	45	46
	－	2	2	2
(2)	47	48		
	2	1		
(3)	49	50	51	
	3	4	2	

【解説】

(1)

$f(x)=(\log x)^2$ を x で微分すると、

$$f'(x)=2\cdot\frac{1}{x}\cdot\log x=\frac{2\log x}{x}$$

であり、さらに x で微分すると、

$$f''(x)=\frac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot x-2\log x}{x^2}=\frac{-2\log x+2}{x^2}$$

である。

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-2\log x+2}{x^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \log x &= 1, x \neq 0 \\ \therefore x &= e \end{aligned}$$

であり、 $x=e$ の前後で $f''(x)$ の符号は変化するので、変曲点の座標は $(e, f(e))=(e, 1)$ となる。

変曲点における接線の方程式は、 $f'(x)=\frac{2\log x}{x}$ より、

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{e}(x-e)+1 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{2}{e}x-1 \end{aligned}$$

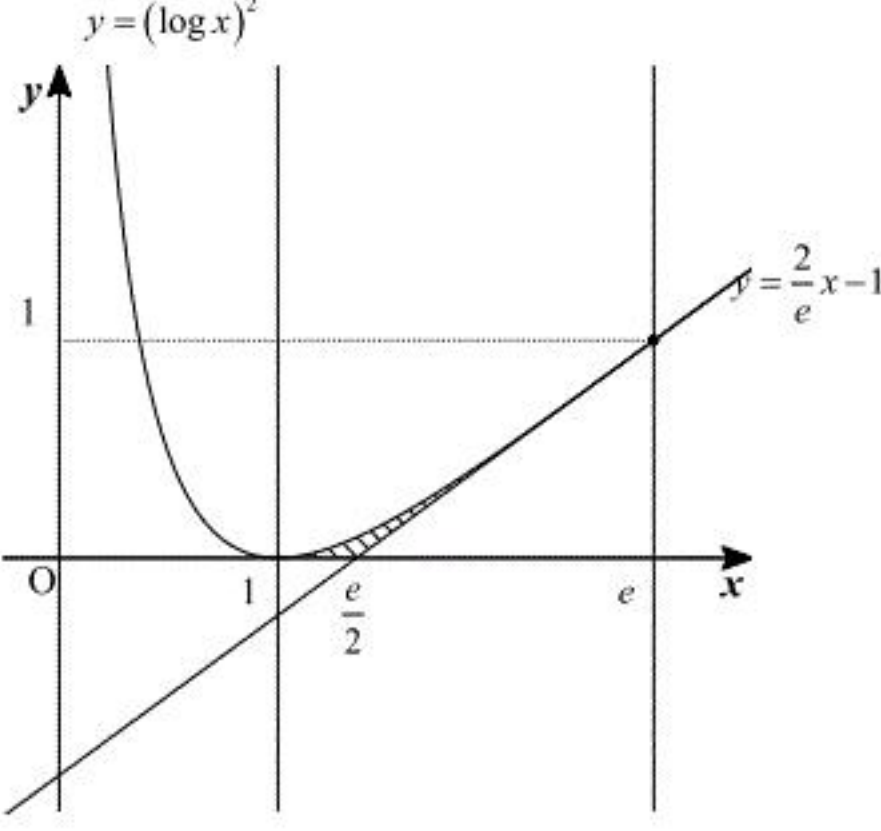
となる。

(3)

(1)より、関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	(0)	...	1	...	e	...
$f'''(x)$		+	+	+	0	－
$f'(x)$		－	0	+	+	+
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$		$\nearrow$

したがって、 $y=f(x)$ と変曲点における接線のグラフは以下のようになる。



求める面積は上図の斜線部分の面積である。その面積は $x=e$ と x 軸と $f(x)=(\log x)^2$ で囲まれた面積から、 $(e, 1), (\frac{e}{2}, 0), (e, 0)$ を頂点に持つ三角形の面積を引いたものである。 $x=e$ と

x 軸と $f(x)=(\log x)^2$ で囲まれた面積は、 $\int_1^e (\log x)^2 dx$ である。ここで、 $\log x=t$ とおくと、積分区間の対応は以下のようになる。

x	1	$\rightarrow$	e
t	0	$\rightarrow$	1

また、

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{d}{dx} \log x \\ \Leftrightarrow \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow e' dt &= dx \end{aligned}$$

であるから、置換積分をすると、

$$\begin{aligned} \int_1^e (\log x)^2 dx &= \int_0^1 t^2 e' dt \\ &= [t^2 e']_0^1 - \int_0^1 2te' dt \\ &= e - 2[te']_0^1 + 2\int_0^1 e' dt \\ &= -e + 2[e']_0^1 \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

となる。したがって、求める面積を S とすると、

$$S=e-2-\frac{1}{2}\cdot\frac{e}{2}\cdot 1=\frac{3}{4}e-2$$

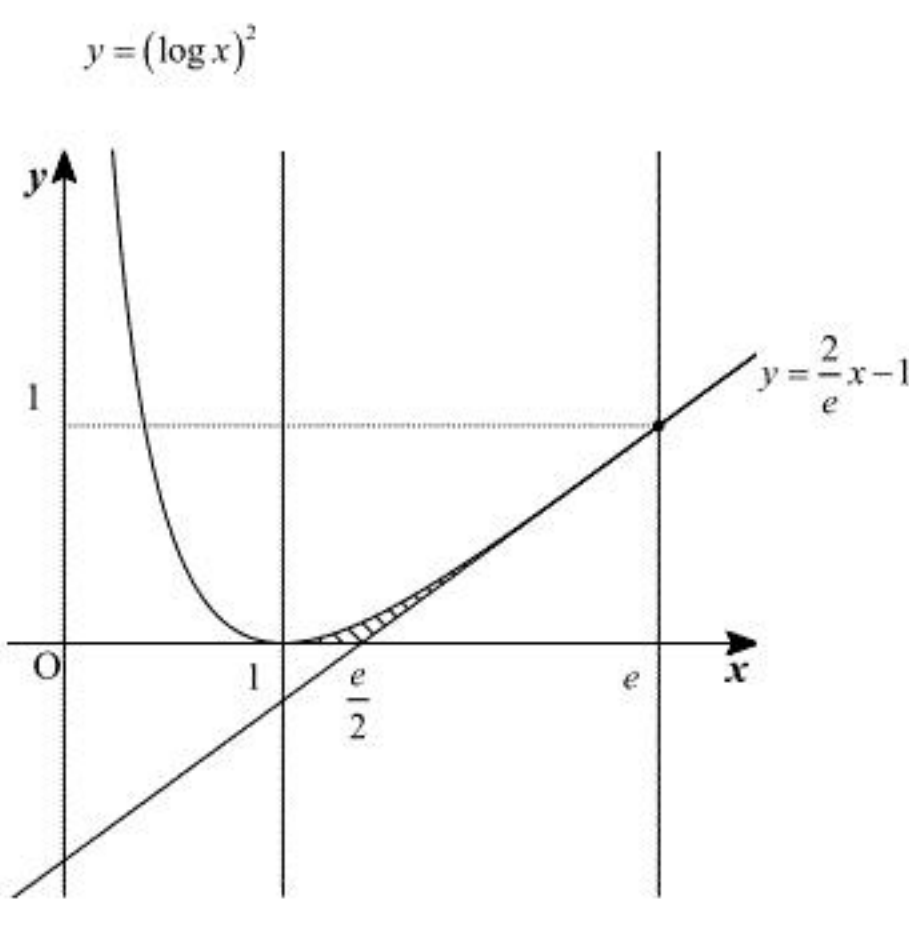
である。

(3)[別解]

(1)より、関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	(0)	...	1	...	e	...
$f'''(x)$		+	+	+	0	－
$f'(x)$		－	0	+	+	+
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$		$\nearrow$

したがって、 $y=f(x)$ と変曲点における接線のグラフは以下のようになる。



求める面積は上図の斜線部分の面積である。その面積は $x=e$ と x 軸と $f(x)=(\log x)^2$ で囲まれた面積から、 $(e, 1), (\frac{e}{2}, 0), (e, 0)$ を頂点に持つ三角形の面積を引いたものである。 $x=e$ と

x 軸と $f(x)=(\log x)^2$ で囲まれた面積は、 $\int_1^e (\log x)^2 dx$ である。よって、

$$\begin{aligned} \int_1^e (\log x)^2 dx &= \left[x(\log x)^2 \right]_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \log x dx \\ &= e - \int_1^e 2 \log x dx \\ &= e - 2[x \log x - x]_1^e \\ &= e - 2(e - e + 1) \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

となる。したがって、求める面積を S とすると、

$$S=e-2-\frac{1}{2}\cdot\frac{e}{2}\cdot 1=\frac{3}{4}e-2$$

である。