

I

〔解答〕

(1)	1	2		
	1	7		
(2)	3	4	5	
	4	3	5	
(3)	6	7	8	9
	1	6	2	1

〔解説〕

(1)

それぞれの番号が書かれたカードを取り出す確率は同様に確からしいとする。ある整数が5の倍数となるための必要十分条件は、一の位が0か5になることである。いま、箱の中には5のカードが1枚だけあるから、作った3桁の数が5の倍数になるための必要十分条件は、作った3桁の数の一の位が5になることである。一の位のみに着目すると、1から7のそれぞれの数が一の位になる確率は同様に確からしい。よって、求める確率は

$$\frac{1}{7}$$

である。

(2)

ある整数が9の倍数となるための必要十分条件は、それぞれの位の数の和が9の倍数となることである。カードの順番を無視して、その組み合わせのみに着目すると、組み合わせは全部で

$${}_7C_3 = 35 \text{ (通り)}$$

あり、それははすべて同様に確からしい確率で起こる。また、それぞれの位の和が9の倍数となるような組み合わせは

$$(1, 2, 6), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (5, 6, 7)$$

の4通りである。よって、求める確率は

$$\frac{4}{35}$$

である。

(3)

まず、作った3桁の数が5の倍数かつ9の倍数となる確率を求める。9の倍数になるのは、(2)の過程で挙げたように、数字の組み合わせが(1, 2, 6), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (5, 6, 7)のいずれかであるときである。(1)での考察と同様に考えると、この中でさらに5の倍数となるようなものは

$$135, 315, 675, 765$$

の4通りである。よって、作った3桁の数が5の倍数かつ9の倍数となる確率は

$$\frac{4}{{}_7P_3} = \frac{4}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{2}{105}$$

である。よって、作った3桁の数が5の倍数または9の倍数となる確率は

$$\frac{1}{7} + \frac{4}{35} - \frac{2}{105} = \frac{5}{21}$$

である。余事象を考えると、作った3桁の数が5の倍数でも9の倍数でもない確率は

$$1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}$$

である。

〔解答〕

(1)	10	11	12	13	14					
	3	4	—	3	4					
(2)	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	1	1	8	1	9	1	3	7	1	
	24	25	26	27	28	29	30			
	8	1	3	1	8	7	9			

〔解説〕

(1)

加法定理より

$$\begin{aligned}
 \sin 3x &= \sin(2x+x) \\
 &= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \\
 &= 2 \sin x \cos^2 x + (1-2 \sin^2 x) \sin x \\
 &= 2 \sin x (1-\sin^2 x) + (1-2 \sin^2 x) \sin x \\
 &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos 3x &= \cos(2x+x) \\
 &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\
 &= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x \\
 &= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2(1-\cos^2 x) \cos x \\
 &= -3 \cos x + 4 \cos^3 x
 \end{aligned}$$

が得られる。

(2)

問題の不等式の真ん中の式を、(1)の結果と合成公式を利用して変形すると

$$\begin{aligned}
 3(\sqrt{3} \sin x + \cos x) - 4(\sqrt{3} \sin^3 x + \cos^3 x) &= \sqrt{3}(3 \sin x - 4 \sin^3 x) - (-3 \cos x + 4 \cos^3 x) \\
 &= \sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x \\
 &= 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)
 \end{aligned}$$

となる。よって、問題の不等式を書き換えると

$$0 < 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) < 1 \Leftrightarrow 0 < \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}$$

となる。 $0 \leq x \leq \pi$ であるから、 $-\frac{\pi}{6} \leq 3x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{17}{6}\pi$ である。よって、

$$0 < \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2} \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow 0 < 3x - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi < 3x - \frac{\pi}{6} < \pi, 2\pi < 3x - \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{18}\pi < x < \frac{1}{9}\pi, \frac{1}{3}\pi < x < \frac{7}{18}\pi, \frac{13}{18}\pi < x < \frac{7}{9}\pi
 \end{aligned}$$

が求める範囲である。

Ⅲ

〔解答〕

(1)	31	32	33	34	35	36	37	38	39
	3	2	2	－	7	8	1	5	2
(2)	40	41							
	1	7							

〔解説〕

(1)

条件 2 の式に $n=3$ を代入して変形すると

$$2\overrightarrow{O_3A_3}+3\overrightarrow{O_3B_3}+4\overrightarrow{O_3C_3}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{O_3A_3}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{O_3B_3}-2\overrightarrow{O_3C_3}$$

となる。両辺を二乗すると

$$\left|\overrightarrow{O_3A_3}\right|^2=\frac{9}{4}\left|\overrightarrow{O_3B_3}\right|^2+6\overrightarrow{O_3B_3}\cdot\overrightarrow{O_3C_3}+4\left|\overrightarrow{O_3C_3}\right|^2$$

となる。更に、条件 1 より $\left|\overrightarrow{O_3A_3}\right|=\left|\overrightarrow{O_3B_3}\right|=\left|\overrightarrow{O_3C_3}\right|=1$ であるから、

$$1=\frac{9}{4}+6\overrightarrow{O_3B_3}\cdot\overrightarrow{O_3C_3}+4\Leftrightarrow\overrightarrow{O_3B_3}\cdot\overrightarrow{O_3C_3}=\frac{-7}{8}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{B_3C_3}\right|^2&=\left|\overrightarrow{O_3B_3}-\overrightarrow{O_3C_3}\right|^2\\&=\left|\overrightarrow{O_3B_3}\right|^2-2\overrightarrow{O_3B_3}\cdot\overrightarrow{O_3C_3}+\left|\overrightarrow{O_3C_3}\right|^2\\&=1-2\cdot\left\{-\frac{7}{8}\right\}+1\\&=\frac{15}{4}\end{aligned}$$

である。したがって、辺 B_3C_3 の長さは $\frac{\sqrt{15}}{2}$ である。

(2)

(1)と同じようにして辺 B_nC_n の長さを求める。条件 2 の式を移項すると

$$2\overrightarrow{O_nA_n}=-n\overrightarrow{O_nB_n}-(n+1)\overrightarrow{O_nC_n}$$

となる。両辺を二乗して、 $\left|\overrightarrow{O_nA_n}\right|=\left|\overrightarrow{O_nB_n}\right|=\left|\overrightarrow{O_nC_n}\right|=1$ であることを利用すると

$$\begin{aligned}4\left|\overrightarrow{O_nA_n}\right|^2&=n^2\left|\overrightarrow{O_nB_n}\right|^2+2n(n+1)\overrightarrow{O_nB_n}\cdot\overrightarrow{O_nC_n}+(n+1)^2\left|\overrightarrow{O_nC_n}\right|^2\\&\Leftrightarrow 4=n^2+2n(n+1)\overrightarrow{O_nB_n}\cdot\overrightarrow{O_nC_n}+(n+1)^2\\&\Leftrightarrow\overrightarrow{O_nB_n}\cdot\overrightarrow{O_nC_n}=-\frac{2n^2+2n-3}{2n(n+1)}\end{aligned}$$

が得られる。よって、

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{B_nC_n}\right|^2&=\left|\overrightarrow{O_nB_n}-\overrightarrow{O_nC_n}\right|^2\\&=\left|\overrightarrow{O_nB_n}\right|^2-2\overrightarrow{O_nB_n}\cdot\overrightarrow{O_nC_n}+\left|\overrightarrow{O_nC_n}\right|^2\\&=1-2\cdot\left\{-\frac{2n^2+2n-3}{2n(n+1)}\right\}+1\\&=2+\frac{2n^2+2n-3}{n(n+1)}\end{aligned}$$

となる。 $\left|\overrightarrow{B_nC_n}\right|>0$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{B_nC_n}\right|&>\frac{\sqrt{399}}{10}\\&\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{B_nC_n}\right|^2>\frac{399}{100}\\&\Leftrightarrow 2+\frac{2n^2+2n-3}{n(n+1)}>\frac{399}{100}\\&\Leftrightarrow n(n+1)>300\quad(\because n(n+1)>0)\end{aligned}$$

となる。 $16\cdot 17=272$, $17\cdot 18=306$ より、この不等式を満たす最小の n は $n=17$ である。よって、求める n は $n=17$ である。

IV

【解答】

(1)	42	43	44	45	46								
	3	4	1	2	1								
(2)	47	48	49	50	51								
	2	3	4	3	2								
(3)	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
	－	4	2	－	4	3	2	3	1	3	2	8	1

【解説】

(1)

$t=\frac{3}{4}$ のとき、点 P の位置は

$$\left(\frac{3}{4}, 0, 0\right)$$

である。また、点 Q は $t=\frac{1}{2}$ で点 B に到達したのちに折り返して、 $t=\frac{3}{4}$ のときは

$$\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$$

の位置にいる。点 R についても同様に考えると、 $t=\frac{1}{4}$ で点 C に、 $t=\frac{1}{2}$ で点 O に到達し、2 回

折り返す。 $t=\frac{3}{4}$ のときは

$$(0, 0, 1)$$

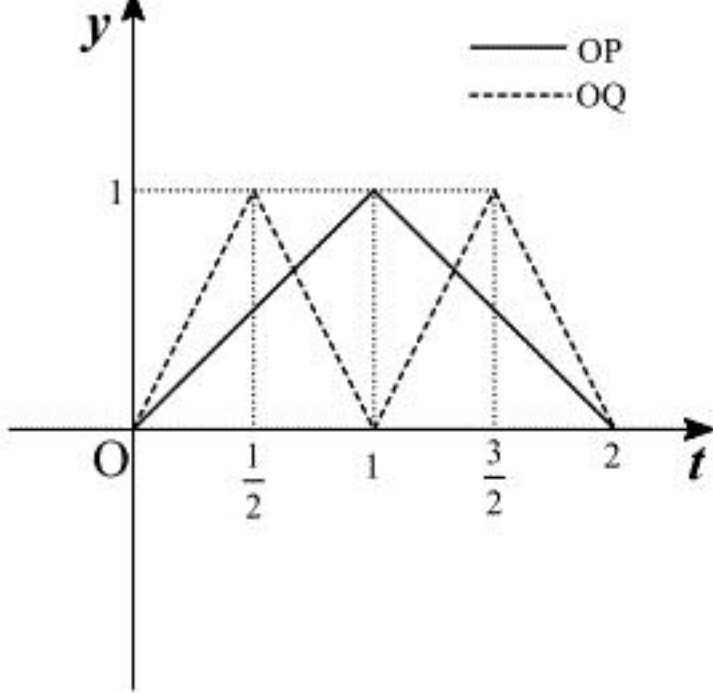
の位置にいる。よって、 $t=\frac{3}{4}$ のとき、線分 OP, OQ, OR の長さはそれぞれ

$$\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 1$$

である。

(2)

まず、線分 OP, OQ の長さが一致するような t の値を求める。点 P は t が 2 増加するごとに元居た点に戻り、点 Q は t が 1 増加するごとに元居た点に戻る。よって、 t における線分 OP, OQ の長さを表すグラフは下のようになる。



よって、線分 OP, OQ の長さが一致するような $t(0 < t \leq 2)$ は、 $\frac{1}{2} < t < 1$ の区間に 1 つ、

$1 < t < \frac{3}{2}$ の区間に 1 つと $t=2$ であることが分かる。 $\frac{1}{2} < t < 1$ のときを見ると、線分 OP, OQ の長さを表す直線の式はそれぞれ

$$\begin{aligned} y &= t \\ y &= -2t + 2 \end{aligned}$$

となっているから、 y を消去して解くと $t=\frac{2}{3}$ となる。グラフの対称性より、 $1 < t < \frac{3}{2}$ の区間

での求める t の値は $2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ である。よって、線分 OP, OQ の長さが一致するような $t(0 < t \leq$

$2)$ は $t=\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2$ であることが分かった。また、それぞれでの線分 OP, OQ の長さは $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0$ で

ある。次に、それぞれでの線分 OR の長さを調べる。まず $t=\frac{2}{3}$ のときを調べる。点 R は $t=\frac{1}{2}$

で点 O で折り返して点 C に向かって進んでいる。よって、 $t=\frac{2}{3}$ のとき線分 OR の長さは

$$4 \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

である。よって、このとき線分 OP, OQ, OR の長さは一致している。また、線分 OR の長さを

グラフに表すと、線分 OP, OQ のように $t=1$ に関して対称性をもつ。よって、 $t=\frac{4}{3}$ のときも

線分 OR の長さは $\frac{2}{3}$ となり、このとき線分 OP, OQ, OR の長さは一致している。 $t=2$ のとき、

点 R は線分 OR を 4 回往復して点 O の位置にいる。よって、 $t=2$ のとき線分 OR の長さは 0

となり、このとき線分 OP, OQ, OR の長さは一致している。以上より、求める t は

$$t = \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2$$

である。

(3)

$\frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2}$ のとき、点 R は点 C で折り返して 4 の速さで点 O に向かって進んでいる。 $t=\frac{1}{4}$ の

とき、線分 OR の長さは 1 である。よって、 $\frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2}$ のときの線分 OR の長さは

$$-4\left(t - \frac{1}{4}\right) + 1 = -4t + 2$$

となる。また、このとき線分 OP, OQ の長さはそれぞれ $t, 2t$ である。また、 $\triangle OPQ$ と線分 OR

は直交している。よって、 $\triangle OPQ$ の面積を S とおくと

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot S \cdot \text{OR} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot t \cdot 2t\right) \cdot (-4t + 2) \\ &= -\frac{4}{3}t^3 + \frac{2}{3}t^2 \end{aligned}$$

となる。

$$\frac{dV}{dt} = -4t^2 + \frac{4}{3}t = -4t\left(t - \frac{1}{3}\right)$$

より、増減表を書くと下のようになる。

t	$\frac{1}{4}$	...	$\frac{1}{3}$	...	$\frac{1}{2}$
$\frac{dV}{dt}$	↗	+	0	−	↘
V		↗	極大	↘	

よって、 V は $t=\frac{1}{3}$ のとき最大値をとり、その値は

$$-\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{81}$$

である。