

数 学

注 意

1. 問題は全部で4題あり、冊子は計算用の余白も合わせて10ページである。
2. 解答用紙に氏名を忘れずに記入すること。
3. 解答は解答用紙の指定された欄に記入すること。指定の欄以外に記入されたものは採点の対象としない。
4. 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはならない。
5. 解答用紙は必ず提出すること。問題冊子は持ち帰ってよい。

マーク・シート記入上の注意については、この問題冊子の裏表紙に記載されているので試験開始までに確認すること。ただし、冊子を開いてはならない。

マーク・シート記入上の注意

- 1 解答は、解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークすること。
- 2 問題の文中の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ などには、特に指示がないかぎり、符号(－), 数字(0～9)又は文字(a～d)が入る。1, 2, 3, … の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応する。それらを解答用紙の1, 2, 3, … で示された解答欄にマークして答えよ。

例 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ に -83 と答えたいとき

1	☒ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9	☐ a	☐ b	☐ c	☐ d	
2	☐ ー	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☒ 8	☐ 9	☐ a	☐ b	☐ c	☐ d
3	☐ ー	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☒ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9	☐ a	☐ b	☐ c	☐ d

なお、同一の問題文中に $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ などが2度以上現れる場合、2度目以降は、 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ のように細字で表記する。

- 3 分数形で解答する場合、分数の符号は分子につけ、分母につけてはいけない。

例えば、 $\frac{\boxed{4} \boxed{5}}{\boxed{6}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは、 $\frac{-4}{5}$ として答えよ。

また、それ以上約分できない形で答えること。

例えば、 $\frac{3}{4}$ と答えるところを、 $\frac{6}{8}$ のように答えてはいけない。

- 4 根号あるいは対数を含む形で解答する場合は、根号の中や真数に現れる自然数が最小となる形で答えよ。

例えば、 $\boxed{7} \sqrt{\boxed{8}}$ に $4\sqrt{2}$ と答えるところを、 $2\sqrt{8}$ のように答えてはいけない。また、 $\boxed{9} \log_2 \boxed{10}$ に $6\log_2 3$ と答えるところを、 $3\log_2 9$ のように答えてはいけない。

- 5 分数形で根号を含む形で解答する場合、 $\frac{\boxed{11} + \boxed{12} \sqrt{\boxed{13}}}{\boxed{14}}$ に $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

と答えるところを、 $\frac{6+4\sqrt{2}}{4}$ や $\frac{6+2\sqrt{8}}{4}$ のように答えてはいけない。

I 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7の各数字を1つずつ書いた7枚のカードがある.

このカードを箱に入れ、箱からカードを3枚続けて取り出す. ただし、取り出したカードは箱に戻さないものとする. そして、カードに書かれた数字を取り出した順に左から並べ、3桁の数を作る.

(1) 作った3桁の数が5の倍数である確率は、 $\frac{\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}}$ である.

(2) 作った3桁の数が9の倍数である確率は、 $\frac{\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array}}$ である.

(3) 作った3桁の数が5の倍数でも9の倍数でもない確率は、 $\frac{\begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 7 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline 8 & 9 \\ \hline \end{array}}$ である.

II

(1) $\sin 3x = \sin(2x + x)$, $\cos 3x = \cos(2x + x)$ より, 次の等式が得られる.

$$\sin 3x = \boxed{10} \sin x - \boxed{11} \sin^3 x$$

$$\cos 3x = \boxed{12} \boxed{13} \cos x + \boxed{14} \cos^3 x$$

(2) $0 \leq x \leq \pi$ のとき, 不等式

$$0 < 3(\sqrt{3} \sin x + \cos x) - 4(\sqrt{3} \sin^3 x + \cos^3 x) < 1$$

の解は

$$\frac{\boxed{15}}{\boxed{16} \boxed{17}} \pi < x < \frac{\boxed{18}}{\boxed{19}} \pi, \quad \frac{\boxed{20}}{\boxed{21}} \pi < x < \frac{\boxed{22}}{\boxed{23} \boxed{24}} \pi,$$

$$\frac{\boxed{25} \boxed{26}}{\boxed{27} \boxed{28}} \pi < x < \frac{\boxed{29}}{\boxed{30}} \pi$$

である. ただし, $\frac{\boxed{18}}{\boxed{19}} < \frac{\boxed{20}}{\boxed{21}}$, $\frac{\boxed{22}}{\boxed{23} \boxed{24}} < \frac{\boxed{25} \boxed{26}}{\boxed{27} \boxed{28}}$ とする.

- III 自然数 n に対して, 3 点 A_n, B_n, C_n を頂点とする $\triangle A_n B_n C_n$ が次の条件 1, 2 を満たしている.

条件 1 「外接円の半径が 1 である」

条件 2 「外心を O_n とするとき,

$$2 \overrightarrow{O_n A_n} + n \overrightarrow{O_n B_n} + (n+1) \overrightarrow{O_n C_n} = \vec{0}$$

が成り立つ」

- (1) $n = 3$ とする. 条件 2 より,

$$\overrightarrow{O_3 A_3} = -\frac{\boxed{31}}{\boxed{32}} \overrightarrow{O_3 B_3} - \boxed{33} \overrightarrow{O_3 C_3}$$

である. さらに, 条件 1 より, $|\overrightarrow{O_3 A_3}| = |\overrightarrow{O_3 B_3}| = |\overrightarrow{O_3 C_3}| = 1$ であるから,

$$\overrightarrow{O_3 B_3} \cdot \overrightarrow{O_3 C_3} = \frac{\boxed{34} \boxed{35}}{\boxed{36}}$$

である. また, 辺 $B_3 C_3$ の長さは $\frac{\sqrt{\boxed{37} \boxed{38}}}{\boxed{39}}$ である.

- (2) 辺 $B_n C_n$ の長さが $\frac{\sqrt{399}}{10}$ より大きくなるような最小の n は $\boxed{40} \boxed{41}$ である.

- IV 点 O を原点とする空間内に、3 点 A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)がある。線分 OA, OB, OC 上を、点 P, Q, R がそれぞれ毎秒 1, 2, 4 の速さで往復している。3 点 P, Q, R は同時に原点 O を出発したとし、経過時間を t 秒とする。

(1) $t = \frac{3}{4}$ のとき、線分 OP, OQ, OR の長さはそれぞれ $\frac{\boxed{42}}{\boxed{43}}$, $\frac{\boxed{44}}{\boxed{45}}$,

$\boxed{46}$ である。

- (2) $0 < t \leq 2$ において、線分 OP, OQ, OR の長さが一致するのは

$t = \frac{\boxed{47}}{\boxed{48}}, \frac{\boxed{49}}{\boxed{50}}, \boxed{51}$ のときである。ただし、 $\frac{\boxed{47}}{\boxed{48}} < \frac{\boxed{49}}{\boxed{50}} < \boxed{51}$ と

する。

- (3) $\frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2}$ とする。線分 OR の長さは $\boxed{52}\boxed{53}t + \boxed{54}$ である。

さらに、四面体 OPQR の体積を V とし、 V を t を用いて表すと、

$$V = \frac{\boxed{55}\boxed{56}}{\boxed{57}}t^3 + \frac{\boxed{58}}{\boxed{59}}t^2$$

である。 V は $t = \frac{\boxed{60}}{\boxed{61}}$ のとき最大値 $\frac{\boxed{62}}{\boxed{63}\boxed{64}}$ をとる。